

Exercice 1 (5 points)

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n .

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.0000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. a. Soit x un réel de l'intervalle $] -\infty ; 5[$.
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $] -\infty ; 5[$.

4. En utilisant le théorème ci-dessous et les questions précédentes, expliquer pourquoi la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Théorème : Si une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ converge, alors la limite est solution de $f(x) = x$.
remarque : la fonction f doit être continue, ce qui est le cas ici.

Exercice 2 (7 points)

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1 700$ et $b_0 = 1 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n , déterminer une relation liant a_n et b_n .
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
- b. Exprimer v_n en fonction de n .
- c. En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
- b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return...
```

- b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

Exercice 3 (6 points)

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite si elle existe. Justifier.

$$A_n = \frac{2n^2 + 1}{3n^3 + 3n - 1}$$

$$D_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$B_n = 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 + \dots + 0.6^n$$

$$E_n = \frac{2 - (1.1)^n}{(-0.9)^n - 2}$$

$$C_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 2}$$

$$F_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n} \text{ où } v_n = \frac{n + 1}{n - 1}$$

Exercice 4 (2 points)

(w_n) est la suite définie par $w_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = \frac{2w_n + 1}{w_n}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \leq w_n \leq 3$$