

Exercice 1 (5 points)**Partie A**

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n .

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$.

À la seconde on trouve $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1,333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.0000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 5[$ par : $f(x) = \frac{4}{5-x}$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $] -\infty ; 5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty ; 5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$.

Comme $f(1) = \frac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \frac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

3. a. Soit x un réel de l'intervalle $] -\infty ; 5[$.

On a pour $x < 5$:

$$f(x) = x \iff \frac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $] -\infty ; 5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{ou} \\ x-4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leq 4$, on a donc $S = \{1 ; 4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante ;
- $1 \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geq 1$.

Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2 (7 points)

1. D'après le texte :

- $a_1 = a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
- $b_1 = b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$

2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 3000$.

3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n$.

Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n \\ &= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300 \end{aligned}$$

4. a. Soit la propriété : $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

• **Initialisation**

$$a_0 = 1700 \text{ et } a_1 = 1575 \text{ donc } 1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n , soit $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$$

$$\Leftrightarrow 0,75 \times 1200 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 0,75 \times 1700$$

$$\Leftrightarrow 900 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1275$$

$$\Leftrightarrow 900 + 300 \leq 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leq 0,75 \times a_n + 300 \leq 1275 + 300$$

$$\Leftrightarrow 1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1575$$

$$\text{Or } 1575 \leq 1700 \text{ donc } 1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1700.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout n , $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

b. Étude de la convergence de la suite (a_n) .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leq a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = a_n - 1200$; donc $a_n = v_n + 1200$.

$$\begin{aligned} \text{a. } v_{n+1} &= a_{n+1} - 1200 = 0,75a_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900 \\ &= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

- b. On en déduit que, pour tout n , on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.
- c. On sait que, pour tout n , $a_n = v_n + 1\,200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.
6. a. $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1\,200$.
- b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3\,000 - 1\,200 = 1\,800$.
7. a. On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while A >= 1280 :
        n = n + 1
        A = 0.75 * A + 300
    return n
```

- b. La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `seuil` est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1\,280$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned}
 a_n < 1\,280 &\iff 500 \times 0,75^n + 1\,200 < 1\,280 \iff 500 \times 0,75^n < 80 \\
 &\iff 0,75^n < \frac{80}{500} \iff \ln(0,75^n) < \ln(0,16) \iff n \ln(0,75) < \ln(0,16) \\
 &\iff n > \frac{\ln(0,16)}{\ln(0,75)}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,16)}{\ln(0,75)} \approx 6,38$ donc la valeur de n renvoyée par la fonction `seuil` est 7.

Exercice 3

$$\frac{\cancel{n^2} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2} \left(3n + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$1) \lim A_n = \lim \frac{2n^2}{3n^3} = \textcircled{0}$$

$$2) \quad 1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^n = \frac{1 - 0,6^{n+1}}{1 - 0,6}$$
$$0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^n = \frac{1 - 0,6^{n+1}}{0,4} - 1$$

$$\lim 0,6^{n+1} = 0 \quad \text{car du type } q^n \text{ avec } -1 < q < 1$$

$$\text{donc } \lim \left(\frac{1 - 0,6^{n+1}}{0,4} - 1 \right) = \frac{1}{0,4} - 1 = \frac{10}{4} - \frac{4}{4} = \textcircled{1,5}$$

$$3) \quad \frac{\overbrace{n} (\sqrt{n} + 1)}{\underbrace{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim (\sqrt{n} + 1) = +\infty \\ \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 \end{array} \right\} \text{ par quotient de limites } \lim \frac{\sqrt{n} + 1}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty$$

$$4) \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Par le théorème "des g  n  r  tes"} \quad \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\text{Par suite } \textcircled{\lim D_n = 3}$$

$$5) \quad \left. \begin{array}{l} \lim 2 - (1,1)^n = -\infty \\ \lim (-0,9)^n - 2 = -2 \end{array} \right\} \text{ Par quotient de limites } \textcircled{\lim E_n = +\infty}$$

$$6) \quad v_n = \frac{n-1}{n-1} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{d'où } \lim v_n = 1^+$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim (2 + v_n) = 3 \\ \lim (1 - v_n) = 0^- \end{array} \right\} \text{ Par quotient de limites on obtient } \textcircled{\lim F_n = -\infty}$$

Exercice 4

$$\frac{2w_n + 1}{w_n} = \frac{2w_n}{w_n} + \frac{1}{w_n} = 2 + \frac{1}{w_n}$$

Initialisation :

$$w_0 = 3$$

$$\text{donc } 2 \leq w_0 \leq 3$$

Hérédité :

Supposons qu'il existe un nombre entier naturel n
tel que : $2 \leq w_n \leq 3$ (H.R.)

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{w_n} \geq \frac{1}{3} \quad \left(\text{car } x \rightarrow \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[\right)$$

$$\frac{1}{3} + 2 \leq \underbrace{2 + \frac{1}{w_n}} \leq 2 + \frac{1}{2}$$

$$2 \leq \frac{7}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{5}{2} \leq 3$$

L'hérédité est démontrée

Conclusion :

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n
 $2 \leq w_n \leq 3$