

Exercice 1 (3 points)

Résoudre le système suivant afin de trouver la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (5 points)

1) On considère le système $(S_1) : \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$

a) Ecrire le système (S_1) sous forme matricielle $AX=B$ en précisant les matrices A,B et X.

b) Résoudre le système (S_1) .

Exercice 3 (6 points)

Le service hotline d'une société de téléphonie reçoit trois types d'appels :

- . des appels concernant des factures notées F
- . des appels pour les offres commerciales notées C
- . des appels pour les problèmes techniques notés T

Une étude a montré qu'en moyenne un appel F nécessite 5 min au standard, un appel C nécessite 2 min au standard et 10 min avec un employé spécialisé et un appel T nécessite 3 min au standard et 7 min avec un employé spécialisé.

Au cours de la dernière heure, la hotline a reçu 122 appels.

Les standardistes ont été actifs durant 440 min

et les employés spécialisés durant 580 min.

On note x (respectivement y et z) le nombre d'appels F (respectivement C et T) reçus au cours de la dernière heure.

1) Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.

2) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ecrire le système sous la forme $AX=B$ où les matrices A et B sont à préciser.

3) Résoudre le système.

Exercice 4 (6 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3 .

2) Déterminer les réels a,b et c tels que :

$$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3$$

3) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 5 (bonus)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2 + 11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$