Exercice 1 (4 points)

1) Déterminer une fonction ϕ de la forme $\phi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ avec a,b et c des nombres réels

solution particulière de l'équation différentielle $(E) : 2y' - 3y = (x^2 + 5x + 3)e^{2x}$

2) Donner toutes les solutions de cette équation

Exercice 2 (6 points)

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210 °C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E): \quad y' + 0,02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

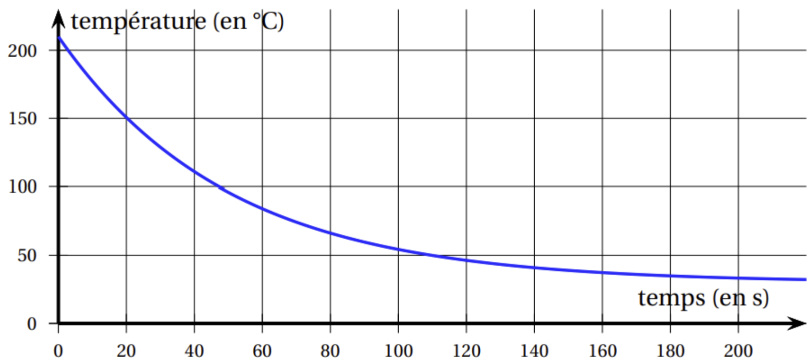
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0,02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30 °C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 °C lorsque t tend vers l'infini.
Démontrer que $m = 0,6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\mathrm{e}^{-0,02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Exercice 3 (6 points)

$A = \int_0^3 (t^2 + t)\,\mathrm{d}t$

$B = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^5}\right)\,\mathrm{d}t$

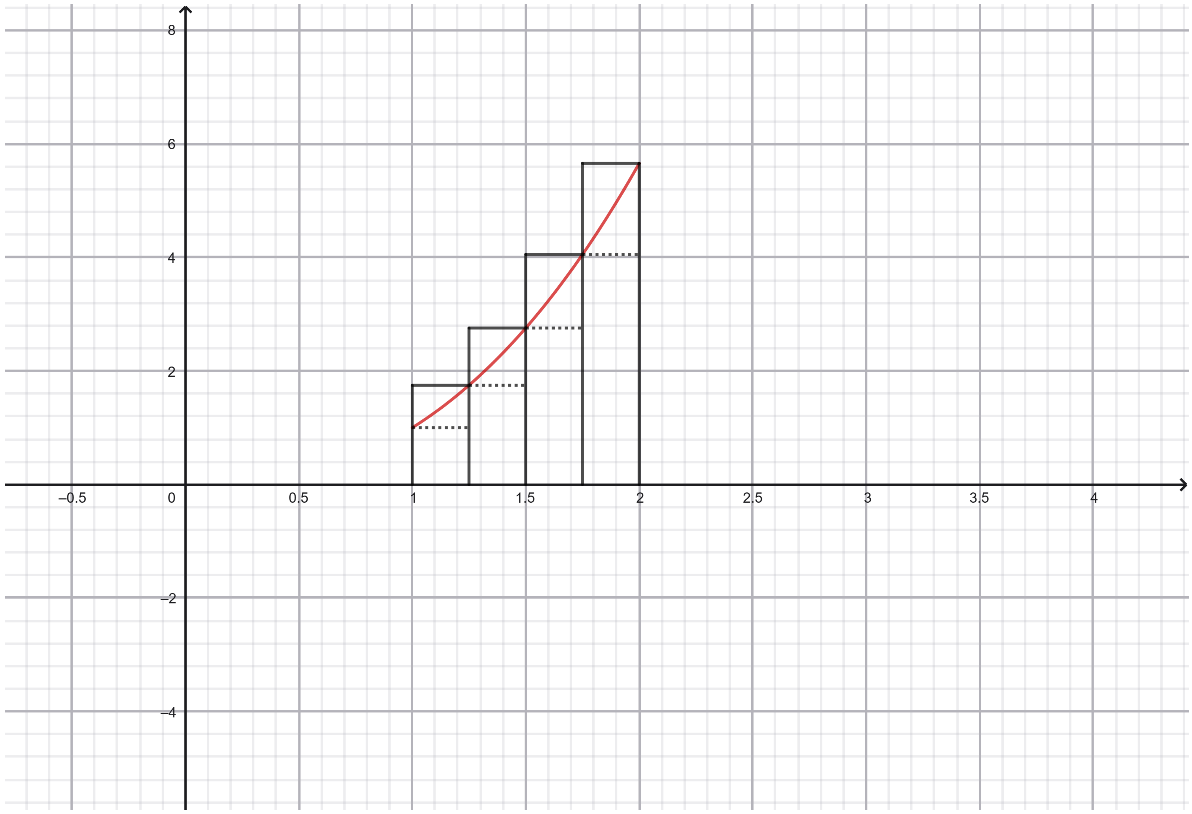
$C = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (méthode intg par parties)

$D = \int_0^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2t+9}}\right)\,\mathrm{d}t$

$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$

$F = \int_0^1 te^{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 (4 points)



On veut encadrer l'intégrale $I = \int_1^2 x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

1) Etudier les variations de la fonction $f(x) = x^2\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1;2]$.

2) On subdivise en quatre intervalles égaux l'intervalle $[1;2]$ (voir graphique ci-dessus)

a) Donner un encadrement par la méthode des rectangles de l'intégrale I.

b) Calculer la borne de gauche (arrondi au centième par défaut)
et la borne de droite (arrondi au centième par excès)

3) On subdivise l'intervalle $[1;2]$ en n intervalles de même longueur.

Quelle valeur de n faut il prendre pour avoir un encadrement de I au centième ?