Exercice 1

1) $\phi(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

$\phi'(x) = \left(2ax^2+(2a+2b)x + b+2c\right)e^{2x}$

$2\phi'(x) - 3\phi(x) = (x^2+5x+3)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \left(ax^2+(4a+b)x+(2b+c)\right)e^{2x} = (x^2+5x+3)e^{2x}$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a+b = 5 \\ 2b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement $\phi(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$

2) les solutions de $2y'-3y=0$
sont les fonctions $x \to Ce^{\frac{3}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Conclusion : les solutions de (E)

$$S = \left\{ f(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} + (x^2+x+1)e^{2x} \, , \, C\in\mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3

$$A = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{3} + \frac{9}{2} = 13,5$$

$$B = \left[-\frac{1}{4t^4}\right]_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\,2^4} = \frac{15}{64}$$

$$C = \left[(x-1)\,\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2x}}{2}\,dx$$

$$C = \left[(x-1)\,\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^2$$

$$C = \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{e^4}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{e^4+3}{4}$$

$$D = \left[\sqrt{2t+9}\right]_0^8 = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$$

$$E = \left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}$$

$$F = \left[\frac{1}{2}\,e^{t^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}\left(e^2 - e\right) = \frac{e(e-1)}{2}$$

Exercice 4

1) $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1;2]$
$\left.\begin{array}{l} 5x^2 > 0 \\ 2\sqrt{x} > 0 \end{array}\right\} \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}} > 0$

x	1	2
$f'(x)$	$+$	
f	$1 \nearrow$	$4\sqrt{2}$

2) a) Somme des aires des petits rectangles $\leqslant I \leqslant$ Somme des aires des grands rectangles

$$\frac{1}{4}f(1) + \frac{1}{4}f(1{,}25) + \frac{1}{4}f(1{,}5) + \frac{1}{4}f(1{,}75) \leqslant I \leqslant \frac{1}{4}f(1{,}25) + \frac{1}{4}f(1{,}5) + \frac{1}{4}f(1{,}75) + \frac{1}{4}f(2)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} f\left(1+\frac{k}{4}\right) \leqslant I \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=4} f\left(1+\frac{k}{4}\right)$$

b) borne de gauche : $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f\left(1+\frac{k}{4}\right) \approx 2{,}38$

borne de droite : $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f\left(1+\frac{k}{4}\right) \approx 3{,}56$

3) Avec une subdivision en n intervalles, on obtient

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{A} \leqslant I \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{B}$$

$B - A = \frac{1}{n}f(2)$

On cherche n tel que $\frac{1}{n}f(2) < 10^{-2} \iff \frac{4\sqrt{2}}{n} < \frac{1}{100}$

$\frac{n}{4\sqrt{2}} > 100 \iff n > 4\sqrt{2} \times 100$

$n \geqslant 566$

Il faut prendre $n = 566$

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 0{,}02y = m$.

Partie A

1. On sait que l'équation différentielle $y' + 0{,}02y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   D'autre part une fonction constante $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de (E) (avec donc $y' = 0$) si $0 + 0{,}02\alpha = m \iff 0{,}02\alpha = m \iff \alpha = \dfrac{m}{0{,}02} = 50m$.

   Conclusion : toutes les solutions de (E) sont les fonctions définies par

$$t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{0{,}02t} + 50m,\quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 50m$.

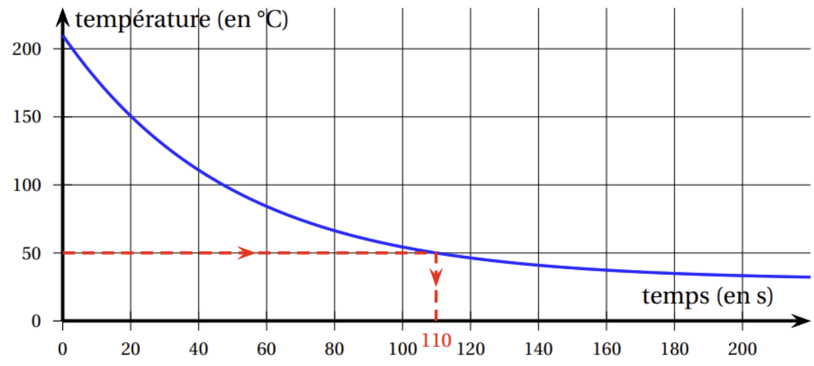
   Or on a $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 30$, donc $m = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.
3. Avec $50m = 50 \times 0{,}6 = 5 \times 6 = 30$, les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $t \longmapsto f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$

   On a $f(0) = 210 \iff k \times 1 + 30 = 210 \iff k = 180$.

   Finalement : $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.



1. **a.** On lit sur le graphique $T \approx 110$ (s).

   b. $f(T) = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} + 30 = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 20$

   $\iff 20 \times 9\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 20 \times 1 \iff 9\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}02T} = \dfrac{1}{9}$

   $\iff -0{,}02T = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -0{,}02T = -\ln 9 \iff 0{,}02T = \ln 9$

   $\iff T = \dfrac{\ln 9}{0{,}02}$

   Donc $T = \dfrac{\ln 9}{0{,}02} = 50\ln 9 \approx 109{,}86$.
2. La valeur moyenne $\overline{t}$ de la température sur les 100 premières secondes est :

   $\overline{t} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\int_0^{100} \left(180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{100}\left[-\dfrac{180}{0{,}02}\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30t\right]_0^{100}$

   $= \dfrac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30t\right]_0^{100} = \dfrac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-2} + 9000 + 3000\right]$

   $= \dfrac{1}{100}\left[9000\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 3000\right] = 90\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 30 \approx 107{,}82$

   soit environ 107,8 (°C).