Exercice 1

1)

$$\begin{array}{r|l} 19 & 13 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \qquad 19 = 13\times 1 + 6 \qquad 6 = a - b$$

(a = 19, b = 13)

$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad 13 = 6\times 2 + 1 \qquad 1 = -2a + 3b$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \qquad 6 = 1\times 6 + 0$$

$$PGCD(19\,;13) = 1$$

2)

$13(3) + 19(-2) = 1$ D'après l'algo d'Euclide

$(3\,;-2)$ est une solution de $13x + 19y = 1$

3) $(3000\,;-2000)$ est une solution de $13x + 19y = 1000$
$(x_0\,;\ y_0)$

4) Soit $(x\,;y)$ une solution quelconque

$$\begin{cases} 13x + 19y = 1000 \\ 13x_0 + 19y_0 = 1000 \end{cases}$$

ce qui donne $13x + 19y = 13x_0 + 19y_0$

$\Leftrightarrow 13(x - x_0) = 19(y_0 - y)$

13 divise $19(y_0 - y)$
et $PGCD(13\,;19) = 1$ } Gauss $\Rightarrow$ 13 divise $y_0 - y$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $y_0 - y = 13k$

$\Leftrightarrow y = -2000 - 13k$

De même par Gauss il existe k' t.q. 19 divise $x - x_0$

$$x - x_0 = 19k'$$

$$x = 3000 + 19k'$$

Il est facile de vérifier que $k' = k$

Finalement les solutions sont les couples suivants

$$S = \{(3000 + 19k\,;-2000 - 13k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

5) On a les contraintes suivantes $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y > x \end{cases} \iff y > x > 0$

$$\begin{cases} 3000 + 19k > 0 \\ 3000 + 19k < -2000 - 13k \end{cases} \iff \begin{cases} k \geq -157 \\ k \leq -157 \end{cases} \iff k = -157$$

pour $k = -157$ on obtient le couple $(17 ; 41)$

<u>Conclusion</u> : Ce soir là, il y avait 17 femmes et 41 hommes.

Exercice 2

$$105a = 6 + 81b$$
$$\iff 105a - 81b = 6$$
$$\iff 35a - 27b = 2$$

$\underset{=a}{35}$ / 8	$27 = b$ / 1	$35 = 27 \times 1 + 8$	$8 = a - b$
27 / 3	8 / 3	$27 = 8 \times 3 + 3$	$3 = -3a + 4b$
8 / 2	3 / 2	$8 = 3 \times 2 + 2$	$2 = 7a - 9b$
3 / 1	2 / 1	$3 = 2 \times 1 + 1$	$1 = -10a + 13b$
2 / 0	1 / 2	$2 = 1 \times 2 + 0$	

$$35(-10) + 27(13) = 1$$
$$35(-10) - 27(-13) = 1$$

$(-10 ; -13)$ est solution de $35X - 27Y = 1$

$\underset{(A_0\ ;\ B_0)}{(-20\ ;\ -26)}$ est une solution particulière de $35X - 27Y = 2$

Recherche de toutes les solutions : Soit $(A\ ;\ B)$ une solution quelconque

$$\begin{cases} 35A_0 - 27B_0 = 2 \\ 35A - 27B = 2 \end{cases}$$

$$35A_0 - 27B_0 = 35A - 27B$$

$$35(A_0 - A) = 27(B_0 - B)$$

D'après Gauss $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.q 35 divise $B_0 - B \iff B_0 - B = 35k$

$\iff B = -26 - 35k$

$$\cancel{35}(A_0 - A) = 27 \times \cancel{35}\, k$$

$\iff A = A_0 - 27k \iff A = -20 - 27k$

$S = \left\{(-20 + 27k\ ;\ -26 + 35k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ Sont les couples solutions de $35X - 27Y = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 6 + 81 \times 9 = 735 \\ 105 \times 7 = 735 \end{array}\right)$$ si $k = 1$ on obtient le couple $(7\ ;\ 9)$

$$J_1 = J_0 + 735$$

$$366 + 365 + 4 = 735$$

la date cherchée est le 11 décembre 2001 (mardi)

$\downarrow$

$735 : 7 = 105$