Exercice 1

1)

a = 29, 18 = b

$$\begin{array}{r|l} 29 & 18 \\ \hline 11 & 1 \end{array} \quad 29 = 18 \times 1 + 11 \quad 11 = a - b$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 11 \\ \hline 7 & 1 \end{array} \quad 18 = 11 \times 1 + 7 \quad 7 = b - (a-b) = -a + 2b$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 7 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \quad 11 = 7 \times 1 + 4 \quad 4 = a - b - (-a + 2b) = 2a - 3b$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \quad 7 = 4 \times 1 + 3 \quad 3 = -a + 2b - (2a - 3b) = -3a + 5b$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad 4 = 3 \times 1 + 1 \quad 1 = 2a - 3b - (-3a + 5b) = 5a - 8b$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \quad 3 = 1 \times 3 + 0$$

2)

$$29(5) + 18(-8) = 1$$

$(5 ; -8)$ est un couple solution de $29x + 18y = 1$

3) En multipliant par 1411, on obtient $(7055 ; -11288)$ est un couple solution de $29x + 18y = 1411$
Le couple sera noté $(x_0 ; y_0)$

4) Soit $(x ; y)$ un couple solution

$$\begin{cases} 29x + 18y = 1411 \\ 29x_0 + 18y_0 = 1411 \end{cases}$$

$$29x + 18y = 29x_0 + 18y_0 \iff 29(x - x_0) = 18(y_0 - y)$$

$\left.\begin{array}{l}29 \text{ divise } 18(y_0-y) \\ \text{et } PGCD(29;18)=1\end{array}\right\}$ D'après Gauss, 29 divise $y_0 - y$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y_0 - y = 29k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = -11288 - 29k}$$

D'après Gauss 18 divise $x - x_0$

donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ $\quad x - x_0 = 18k'$

$$\boxed{x = 7055 + 18k'}$$

$$29 \times 18\, k' = 18 \times 29\, k$$

$$\Leftrightarrow k' = k$$

Finalement les solutions de $29x + 18y = 1411$

$$S = \{(7055 + 18k \; ; -11288 - 29k)\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

5) Il y a un nombre d'adultes et un nombre d'enfants positifs.

$$\begin{cases} 7055 + 18k \geq 0 \\ -11288 - 29k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{-7055}{18} \\ k \leq \dfrac{-11288}{29} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{-390 ; -391\}$$

pour $k = -390$ on obtient le couple $(35 ; 22)$

$k = -391$ on obtient le couple $(17 ; 51)$

Il y avait donc 17 adultes et 51 enfants

(car il est écrit qu'il avait plus d'enfants que d'adultes)

Exercice 1

35 et 37 sont premiers entre eux

$37 = 35 \times 1 + 2 \iff 2 = 37 - 35 \times 1$

$35 = 2 \times 17 + 1 \qquad 1 = 35 - (37-35) \times 17$

$17 = 1 \times 17 + 0 \qquad 1 = 35(18) - 37(17)$

$PGCD(35;37) = 1$

1) $35x = 10 + 37y$

$\iff 35x - 37y = 10$

$(18;17)$ est une solution de $35x - 37y = 1$

$(x_0;y_0) = (180;170)$ est une solution de $35x - 37y = 10$

2) Soit $(X;Y)$ une solution de $35x - 37y = 10$

On a $\begin{cases} 35X - 37Y = 10 \\ 35x_0 - 37y_0 = 10 \end{cases}$ ce qui nous donne

$35(X - x_0) = 37(Y - y_0)$

$\left.\begin{array}{l} PGCD(35;37) = 1 \\ 35 \text{ divise } 37(Y - y_0) \end{array}\right\}$ d'après le théorème de Gauss, il existe un entier k tel que $35k = Y - y_0$

$\iff Y = 170 + 35k$

De même, il existe k' tel que $37k' = X - x_0$

$\iff X = 180 + 37k'$

Comme (X,Y) est solution de $35x - 37y = 10$, on a :

$35(180 + 37k') - 37(170 + 35k) = 10$

$\iff 1295k' = 1295k$

$\iff k' = k$

On a raisonné par condition nécessaire et montré que si $(X;Y)$ est solution, alors il existe k tel que $X = 180 + 37k \quad Y = 170 + 35k$

Réciproquement : Soit K un entier relatif quelconque

$35(180+37K) - 37(170+35K)$

$= 35 \cdot 180 - 37 \cdot 170$

$= 10$

Conclusion : L'ensemble des solutions de $35x - 37y = 10$

est $S = \{(180+37K ; 170+35K)\}_{K \in \mathbb{Z}}$

La vitrine ne peut contenir que 100 bijoux donc

$$0 < X + Y \leq 100$$

On fait varier K. On peut utiliser un tableur $y_1(x) = 180+37X$

$y_2(x) = 170+35X$

K	...	-6	-5	-4	-3	-2	...
X	...	-42	-5	32	69	106	...
Y	...	-40	-5	30	65	100	...

le seul couple qui répond au problème est (32 ; 30)

Le bijoutier a donc acheté 32 pendentifs et 30 bracelets.

Remarque : $0 < X + Y \leq 100$

$\Leftrightarrow 0 < 180 + 37K + 170 + 35K \leq 100$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{350}{72}}_{\simeq -4{,}87} < K \leq \underbrace{\frac{-250}{72}}_{\simeq -3{,}48}$$

$\Leftrightarrow K = -4$