

Les calculatrices sont autorisées.  
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 6 pts

Ex2 : 5 pts

Ex3 : 5 pts

Ex4 : 4 pts

### Exercice 1 (6 points)

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation  $(E) : e^x = \frac{1}{x}$  admet une unique solution réelle et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

#### PARTIE A

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - e^{-x}$

- 1) Démontrer que  $x$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f(x) = 0$
- 2)a) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (On prendra soin d'étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition)
- 2)b) En déduire que l'équation  $(E)$  possède une unique solution sur  $\mathbb{R}$  notée  $\alpha$  et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .
- 2)c) Etudier le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0, \alpha]$ .

#### PARTIE B

On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$

- 1) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à  $g(x) = x$
- 2) En déduire que  $\alpha$  est l'unique réel vérifiant  $g(\alpha) = \alpha$
- 3) Calculer  $g'(x)$  et en déduire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ .

#### PARTIE C

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = g(u_n)$

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$  :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
- 2) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $L$  sa limite.
- 3) Justifier l'égalité  $g(L) = L$ . En déduire la valeur de  $L$ .
- 4) Recopier et compléter les lignes L3,L4,L5 du script en Python afin qu'il donne  $u_4$  :

```

▶ from math import*           #L1
  def suite():                #L2
    u=                         #L3
    for i in range(1, ):      #L4
        u=                     #L5
    return(u)                 #L6

```

## Exercice 2 (5 points)

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : "Pensez-vous avoir réussi l'examen?"

Seules les réponses "oui" ou "non" sont possibles, et on observe que 91,7% des étudiants interrogés ont répondu "oui"

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

65% des étudiants ayant échoué ont répondu "non"

98% des étudiants ayant réussi ont répondu "oui"

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note

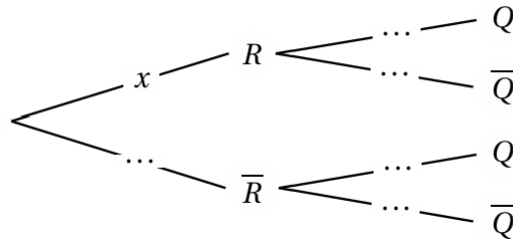
$R$  : l'évènement "l'étudiant a réussi l'examen"

$Q$  : l'évènement "l'étudiant a répondu oui à la question"

Pour un évènement  $A$  quelconque, on note  $P(A)$  sa probabilité et  $\bar{A}$  son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont arrondies à  $10^{-3}$  près (si besoin)

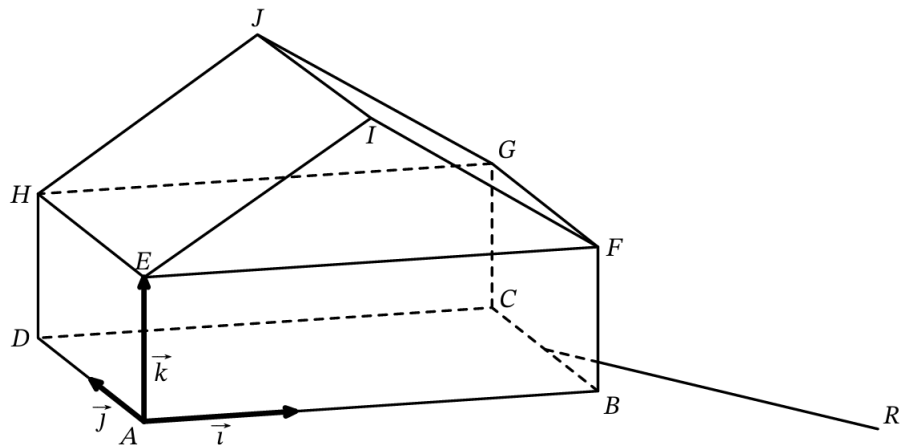
- 1) Préciser les valeurs des probabilités  $P(Q)$  et  $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$ .
- 2) On note  $x$  la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
  - a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b) Montrer que  $x = 0.9$
- 3) L'étudiant interrogé a répondu "oui" à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen?
- 4) La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire  $N$  qui suit une loi binomiale de paramètres  $(20; 0.615)$   
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats. A partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65% des étudiants soient récompensés?
- 5) On interroge au hasard 10 étudiants.  
Les variables aléatoires  $N_1, N_2, \dots, N_{10}$  modélisent la note obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètre  $(20; 0.615)$   
Soit  $S$  la variable définie par  $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$   
Calculer l'espérance  $E(S)$  et la variance  $V(S)$  de la variable aléatoire  $S$ .
- 6) On considère la variable aléatoire  $M = \frac{S}{10}$ 
  - a) Que modélise cette variable aléatoire  $M$  dans le contexte de l'exercice?
  - b) Justifier que  $E(M) = 12.3$  et  $V(M) = 0.47355$
  - c) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous :  
"La probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10.3 et 14.3 est d'au moins 80%"

### Exercice 3 (5 points)

Une maison est constituée d'un parallépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.



On a  $AB=3$ ,  $AD=2$ ,  $AE=1$

On définit les vecteurs  $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ ,  $\vec{k} = \vec{AE}$

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Donner les coordonnées du point G.

2) Le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(2; 0; -3)$  est un vecteur normal au plan (EHI).  
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3) Déterminer les coordonnées du point I.

4) Déterminer une mesure au degré près de l'angle  $\widehat{EIF}$  (On utilisera deux formules du produit scalaire).

5) Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.

Le relais est représenté par le point R de coordonnées  $(6; -3; -1)$

La tranchée est assimilée à un segment d'une droite  $\Delta$  passant par R et dirigée par le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(-3; 4; 1)$ . On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$

b) On admet qu'une équation du plan (BFG) est  $x = 3$

Soit K le point d'intersection de la droite  $\Delta$  avec le plan (BFG).

Déterminer les coordonnées du point K.

c) Le point K appartient-il à l'arête [BC] ?

### Exercice 4 (4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par :  $g(x) = 1 + x - x \ln x$

a) Etudier les limites de  $g$  en  $0$  et en  $+\infty$ .

b) Etudier les variations de  $g$  et construire son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $I$ .  
Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

d) En déduire le signe de  $g$  sur  $I$ .

2)a) Etudier les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ , et interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

c) En déduire le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $I$ .

d) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

e) Déterminer une équation de la tangente  $T$  de  $\mathcal{C}$  au point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de l'axe des abscisses.