

# BAC BLANC 2026 - CORRECTION

## Remarques :

- \* Revoir le théorème des valeurs intermédiaires (hypothèses)
- \* Revoir le théorème du point fixe (continuité de la fonction)
- \* Revoir le calcul d'un angle avec les 2 formules du produit scalaire
- \* Étudier les variations d'une fonction signifie qu'il faut calculer la dérivée et étudier son signe avant de faire le tableau.
- \* Ne pas confondre le signe d'une fonction et les variations d'une fonction
- \* Revoir la signification de "encadrement au centième"

## Exercice 1

### I. Existence et unicité de la solution

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - e^{-x}$ .

1. Démontrer que  $x$  est solution de l'équation (E) si et seulement si  $f(x) = 0$ .

$$(E) : e^x = \frac{1}{x} \iff x e^x = 1 \iff x = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$$

2. Étude du signe de la fonction  $f$

a) Sens de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 + e^{-x}$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ .  
Donc pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 1 > 0$ . Ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

-> Etudions les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \text{ par composée, on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \text{ par composée, on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-x}) = +\infty$$

b) Démontrons que l'équation (E) possède une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$  et que :  $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ .

•  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,107$ . Alors  $x < \frac{1}{2} \implies f(x) < f(\frac{1}{2}) < 0 \implies f(x) < 0$ . L'équation  $f(x) = 0$  n'admet aucune solution dans l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{2}[$ .

•  $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$ . Alors  $x > 1 \implies f(x) > f(1) > 0 \implies f(x) > 0$ . L'équation  $f(x) = 0$  n'admet aucune solution dans l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

• La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ . De plus  $f(\frac{1}{2}) < 0$  et  $f(1) > 0$ .

Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$  :  $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ .

c) Signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ .

$x \in [0, \alpha] \implies f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \implies -1 \leq f(x) \leq 0$  car  $f(\alpha) = 0$  et  $f$  est strictement croissante.

Ainsi  $f$  est négative sur  $[0, \alpha]$ .

## II. Deuxième approche

On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :  $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $g(x) = x$ .

$$g(x) = x \iff \frac{1+x}{1+e^x} = x \iff 1+x = x(1+e^x) \iff 1+x = x + xe^x \iff 1 = xe^x \iff e^x = \frac{1}{x}$$

2. En déduire que  $\alpha$  est l'unique réel vérifiant :  $g(\alpha) = \alpha$ .

On a vu en I-2. (b) que  $\alpha$  était l'unique solution dans  $\mathbb{R}$ , donc dans  $[0; 1]$  de l'équation  $f(x) = 0$  qui est équivalente à  $g(x) = x$ .

En conséquence  $\alpha$  est l'unique solution dans  $[0; 1]$  de l'équation  $g(x) = x$ .

3. Calculer  $g'(x)$  et en déduire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(1+e^x)^2}$$

Donc pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $g'(x) = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \times f(x)$ .

Puisque  $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ ,  $g'(x)$  et  $f(x)$  sont de signes contraires.

Donc, d'après I - 2 (c),  $f$  étant négative sur  $[0; \alpha]$ , pour tout  $x$  de  $[0, \alpha]$ ,  $g'(x) \geq 0$ .

Ainsi la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; \alpha]$ .

### III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite $\alpha$

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

Notons  $\mathcal{P}_n$  la proposition : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  ».

• **Initialisation** : vérifions la proposition au rang 0.

$u_0 = 0$  et  $u_1 = g(0) = 1/2$ . Or d'après I-2. (c),  $\frac{1}{2} \leq \alpha$ . Donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ .

• **Hérédité** : soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons la proposition  $\mathcal{P}_k$  vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie.

On sait que  $g$  est croissante sur  $[0, \alpha]$ .

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,  $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$ .

Donc  $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$  avec  $g(0) = 1/2$  ;  $g(u_k) = u_{k+1}$  ;  $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$  et  $g(\alpha) = \alpha$ .

Par conséquent  $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$  et  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie.

• **Conclusion** : la proposition est initialisée au rang 0 et est héréditaire, le principe de récurrence permet de conclure que :

pour tout entier naturel  $n$ , «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  »

2. a) La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée par  $\alpha$ . Il en résulte d'après le théorème de convergence monotone, que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

b) On a ainsi :  $u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers un réel  $\ell$  et la fonction  $g$  est continue.

Donc :  $g(\ell) = \ell$ . Or cette équation admet  $\alpha$  pour unique solution.

Donc  $\ell = \alpha$ .

c) Le programme python qui affiche  $u_4$ .

```
L3 | u = 0
L4 | for i in range(1,5):
L5 |     u = (1+u)/(1+exp(u))
```

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 2

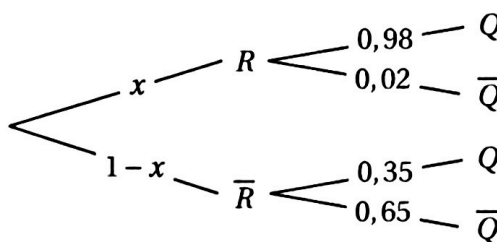
5 points

Puisque l'on interroge un étudiant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Comme 91,7 % des étudiants ont répondu oui, on a donc  $P(Q) = 0,917$ .

Et  $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$ , cela correspond à la probabilité que le candidat interrogé ait répondu « non », sachant qu'il a échoué à l'examen.

2. a. L'arbre pondéré complété est :



b. On sait que  $P(Q) = 0,917$ , or, comme  $R$  et  $\bar{R}$  partitionnent l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales, on a également :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(Q \cap R) + P(Q \cap \bar{R}) \\ &= x \times 0,98 + (1 - x) \times 0,35 \\ &= 0,98x + 0,35 - 0,35x \\ &= 0,63x + 0,35 \end{aligned}$$

Puisque la probabilité de  $Q$  est unique, on peut donc écrire, puis résoudre l'équation :  $0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567$

$$\iff x = \frac{0,567}{0,63}$$

$$\iff x = 0,9$$

La solution de l'équation est donc 0,9 : la probabilité que l'étudiant ait réussi son examen est donc de 0,9 (ou bien : 90 % des étudiants ont réussi leur examen).

3. Pour cette question, on doit calculer  $P_Q(R)$ .

$$\text{On a : } P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \frac{0,882}{0,917} = \frac{126}{131} \approx 0,962$$

Si l'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est d'environ 0,962 (à  $10^{-3}$  près).

C'est-à-dire qu'environ 96,2 % des étudiants ayant répondu « oui » ont effectivement réussi l'examen.

4. Par exploration à la calculatrice, avec une loi binomiale de paramètres  $(20 ; 0,615)$ , on a :  $P(N \geq 11) \approx 0,797$ , et  $P(N \geq 12) \approx 0,649$ .

En choisissant de récompenser les candidats dont la note est supérieure ou égale à 11, la directrice récompensera environ 80 % d'eux.

5. Comme les dix variables aléatoires suivent la même loi binomiale de paramètres 20 et 0,615, chacune de ces variables aléatoires a

- pour espérance :  $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$ ;
- et pour variance :  $V(N_i) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$ .

S étant la somme de ces dix variables aléatoires, on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \dots + E(N_{10}) = 12,3 + 12,3 + \dots + 12,3 = 123$ ;
- comme les variables aléatoires sont indépendantes,  
 $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \dots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355$ .

6. a. La variable aléatoire  $M$  donne la moyenne des notes obtenues par un groupe (un échantillon) de 10 étudiants choisis au hasard.

b. On a bien

- $E(M) = \frac{1}{10} \times E(S) = \frac{1}{10} \times 123 = 12,3$ ;
- $V(M) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \frac{1}{100} \times 47,355 = 0,47355$ .

c. On remarque que l'intervalle de notes considéré :  $]10,3 ; 14,3[$  est un intervalle centré sur l'espérance de  $M$ , autrement dit, la probabilité qui nous intéresse est celle de l'évènement :  $A = \{|M - E(M)| < 2\}$ .

L'évènement contraire de cet évènement est :  $\bar{A} = \{|M - E(M)| \geq 2\}$ .

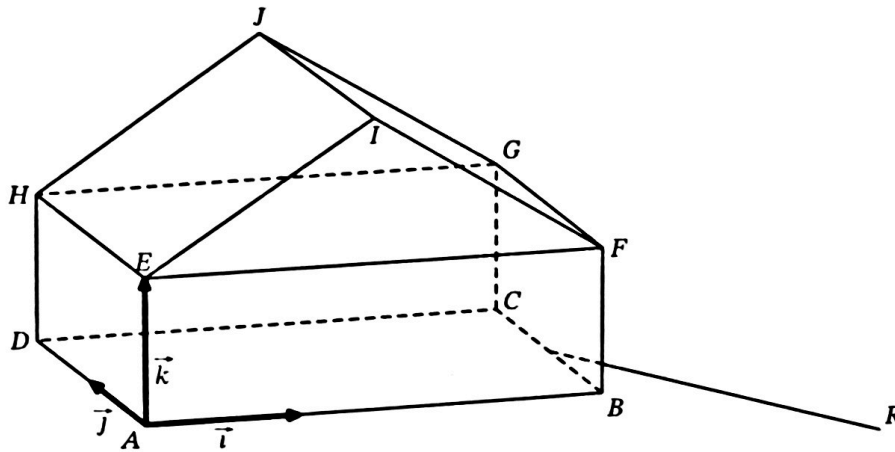
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que :

$$\begin{aligned} P(|M - E(M)| \geq 2) &\leq \frac{V(M)}{2^2} \iff P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4} \\ &\iff P(|M - 12,3| \geq 2) \leq 0,1183875 \\ &\iff P(|M - 12,3| < 2) \geq 1 - 0,1183875 \\ &\iff P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,8816125 \end{aligned}$$

L'affirmation « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % » est donc bien correcte, la probabilité que cet évènement soit réalisé étant supérieure à 0,88, elle est aussi supérieure à 0,8 qui correspond à 80 %.

## Exercice 3

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  surmonté d'un prisme  $EFIHGJ$  dont une base est le triangle  $EIF$  isocèle en  $I$ . Cette maison est représentée ci-dessous.



On a  $AB = 3$ ,  $AD = 2$ ,  $AE = 1$ .

On définit les vecteurs  $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ ,  $\vec{k} = \vec{AE}$ .

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. Donner les coordonnées du point  $G$ .

**Correction :**

On a  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ . On a donc  $G(3; 2; 1)$ .

2. Le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(2; 0; -3)$  est vecteur normal au plan  $(EHI)$ . Déterminer une équation cartésienne du plan  $(EHI)$ .

**Correction :**

$\vec{n}(2; 0; -3)$  est normal à  $(EHI)$  donc une équation cartésienne de  $(EHI)$  est de la forme :  $2x - 3z + d = 0$ .

De plus  $E \in (EHI)$  donc ses coordonnées vérifient l'équation.

On a donc :  $2x_E - 3z_E + d = 0$  donc  $2 \times 0 - 3 \times 1 + d = 0$  soit  $d = 3$

Une équation cartésienne du plan  $(EHI)$  est :  $2x - 3z + 3 = 0$ .

3. Déterminer les coordonnées du point  $I$ .

**Correction :**

—  $I$  est un point du plan  $(ABE)$  donc  $y_I = 0$ .

—  $EIF$  est un triangle isocèle en  $I$  donc le projeté orthogonal de  $I$  sur  $[EF]$  est le milieu de  $[EF]$ . Ainsi  $x_I = \frac{3}{2}$ .

—  $I \in (EHI)$  donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a donc  $2x_I - 3z_I + 3 = 0$ .  
On en déduit  $2 \times \frac{3}{2} - 3z_I + 3 = 0$  et donc  $z_I = 2$ .

Conclusion :  $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle  $\widehat{EIF}$ .

**Correction :**

— Calculons le produit scalaire  $\vec{IE} \cdot \vec{IF}$  à l'aide des coordonnées.

$$\text{On a } \vec{IE} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{IF} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{IE} \cdot \vec{IF} = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 0 + (-1) \times (-1) = -\frac{5}{4}$$

— D'autre part, on a :  $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF})$

$$\text{Comme } IE = IF = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{ on peut écrire :}$$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF}) = \frac{13}{4} \cos(\widehat{EIF})$$

$$\text{On a ainsi : } \frac{13}{4} \cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{4} \text{ donc } \cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{13}. \text{ Conclusion : } \widehat{EIF} \approx 113^\circ$$

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.

Le relais est représenté par le point  $R$  de coordonnées  $(6; -3; -1)$ .

La tranchée est assimilée à un segment d'une droite  $\Delta$  passant par  $R$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête  $[BC]$ .

- a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .

**Correction :**

La droite  $\Delta$  passe par  $R(6; -3; -1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Une représentation paramétrique de  $\Delta$  est donc : 
$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b) On admet qu'une équation du plan  $(BFG)$  est  $x = 3$ .

Soit  $K$  le point d'intersection de la droite  $\Delta$  avec le plan  $(BFG)$ .

Déterminer les coordonnées du point  $K$ .

**Correction :**

$$K(x; y; z) \in \Delta \cap (BFG) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 3 = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \\ x = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 1 \\ y = -3 + 4 = 1 \\ z = -1 + 1 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Le point d'intersection de  $\Delta$  et  $(BFG)$  a pour coordonnées :  $K(3; 1; 0)$ .

c) Le point  $K$  appartient-il bien à l'arête  $[BC]$ ?

**Correction :**

On a :  $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On constate que  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}$  donc  $K$  est le milieu de  $[BC]$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{Le point } K \text{ appartient à l'arête } [BC]}$

## Exercice 4

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 1+x = 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \end{array} \right.$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  (croissance comparées)

$$g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{array} \right.$$
  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

b)  $g$  est dérivable sur  $I$

$$g'(x) = -\ln x$$

rappel :  $\forall x \in ]0; 1[ \quad \ln x < 0$   
 $\forall x \in ]1; +\infty[ \quad \ln x > 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	+
$g'(x)$		0	-
$g$		2	$-\infty$

- 2) Sur  $]0; 1[$ , la fonction  $g$  est strictement croissante et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$  donc on a  $g(x) > 1$   
donc l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante  $0 \in ]-\infty; 2]$  donc d'après le corollaire des valeurs intermédiaires l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$
- Conclusion : l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  sur  $I$ .

Par balayage successifs à la calculatrice, on obtient

$$3 < \alpha < 4$$

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

$$3,59 < \alpha < 3,60$$

d)

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		+	0
		0	-

$$2 a) \cdot \frac{\ln x}{1+x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (\text{croissances comparées})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = 0$$

donc en multipliant

Graphiquement, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+x} = -\infty \end{array} \right\}$$

Graphiquement, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à  $\mathcal{C}$  au voisinage de 0.

b)  $f$  est dérivable sur  $I$  et on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\text{ie } f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

c) Sur  $I$ , on a  $x > 0$ ,  $(1+x)^2 > 0$   
 $f'(x)$  a le même signe que  $g(x)$ , ce qui donne le tableau suivant

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f$			$f(\alpha)$	

d)  $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha - \alpha \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = \alpha \ln \alpha$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = f'(\alpha)$

e)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Le coupe l'axe des abscisse au point  $A(1; 0)$

Equation de la tangente  $T_A$

$$T_A : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$T_A : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 0$$