Exercice 1 (6 points)

Soit l'ensemble $\mathscr{F} = \{A; B; C; D; E\}$

1) Combien y a-t-il de parties de $\mathscr{F}$?

2) Combien y a-t-il de 4-uplets de $\mathscr{F}$?

3) Combien y a-t-il de 4-uplets de $\mathscr{F}$ d'éléments disctincts ?

4) Combien y a-t-il de 4-uplets de $\mathscr{F}$ tels que la troisième lettre est un B ?

5) Combien y a-t-il de 4-uplets de $\mathscr{F}$ où une lettre est répétée deux fois
ex : (A, B, E, A)

Exercice 2 (4 points)

L'urne A contient 10 boules numérotées de 0 à 9.
L'urne B contient 9 boules nommées $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$

PARTIE A
On tire deux boules successivement et sans remise dans l'urne A ,et puis, on tire trois boules successivement et sans remise de l'urne B.
Le résultat est un tirage. exemple : $89CBA$

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Combien y a-t-il de tirages possibles si la première boule est 0 et la cinquième est A ?

PARTIE B
On tire maintenant deux boules simultanément de l'urne A puis trois boules simultanément de l'urne B.
On appelle tirage les boules obtenue exemple : $\{8, 9, A, B, C\}$

1) Combien y a-til de tirages possibles ?

2) Combien de tirages contenant la boule 9 et la boule F ?

Exercice 3 (4 points)

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.

1) Donner la loi de probabilité de X

2) Montrer que l'espérance est $E(X) = 1.2$ et que la variance est $V(X) = 0.48$

On répète n fois l'expérience. X_k donne le nombre de boules rouges tirées lors de la k-ième expérience
$1 \leq k \leq n$.

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

3) Que représente la variable aléatoire M_n ? Déterminer son espérance et sa variance.

4) Justifier que pour tout réel $\alpha > 0$ on a : $P(|M_n - 1.2| \geq \alpha) \leq \dfrac{0.48}{n\alpha^2}$

5) Ecrire l'inégalité dans le cas où $\alpha = 0.1$ et $n = 100$. Interpréter cette inégalité.

6) On prend $\alpha = 0.01$
Déterminer une valeur de n telle que l'on ait : $P(|M_n - 1.2| \geq 0.01) \leq 0.48$
Donner une interprétation.

Exercice 4 (6 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.
   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.
   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.