Exercice 1

1) $2^5 = 32$ parties de $\mathcal{F}$

2) $5^4 = 625$ 4-uplets

3) $A\binom{5}{4} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

4) $5^3 = 125$

5) $\binom{4}{2} \times 5 \times \underbrace{4 \times 3}_{} = 360$

nombre de façons de cocher 2 cases parmi 4

les deux autres lettres

Exercice 2

PARTIE A

1) $10 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7 = A\binom{10}{2} \times A\binom{9}{3} = 45360$

2) $9 \times 8 \times 7 = 504$

tirages successifs sans remises ordre est important

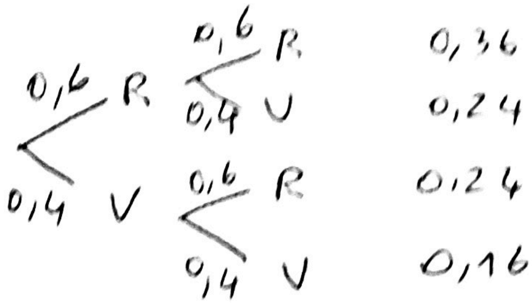
PARTIE B

1) $\binom{10}{2} \times \binom{9}{3} = 3780$

2) $9 \times \binom{8}{2} = 252$

tirages simultanés l'ordre n'a pas d'importance

Exercice 3 Loi binomiale



1)

x_i	0	1	2
p_i	0,16	0,48	0,36

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(2\,;\,0{,}6)$$

2) $E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} p_i x_i = 0 \times 0{,}16 + 1 \times 0{,}48 + 2 \times 0{,}36 = 1{,}2$

$V(X) = 0{,}16\,(0-1{,}2)^2 + 0{,}48\,(1-1{,}2)^2 + 0{,}36\,(2-1{,}2)^8 = 0{,}48$

2ème méthode : formule de König
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = 0{,}48 \times 1^2 + 0{,}36 \times 2^2 - 1{,}2^2 = 0{,}48$

3) M_n représente la v. a. moyenne

$$E(M_n) = E\,\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + E(X_2) \cdots + E(X_n)\right]$$
$$= \frac{1}{n} \times n\,E(X)$$
$$= E(X) = 1{,}2$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\,V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2}\left[V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)\right]$$

$X_1, X_2 \ldots X_n$ sont indépendante
donc $V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$

$$= \frac{1}{n^2}\;n\,V(X)$$
$$= \frac{V(X)}{n} = \frac{0{,}48}{n}$$

4) L'inégalité de Tchebychelt nous donne

$\forall \alpha > 0$ $\quad P\left(|X - E(X)| \geq \alpha\right) \leq \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

c'est à dire $\quad P\left(|X - 1{,}2| \geq \alpha\right) \leq \dfrac{0{,}48}{n\alpha^2}$

5) $P(|X-1,2| \geq 0,1) \leq \dfrac{0,48}{100 \times 0,01}$

$\Leftrightarrow \quad P(|X-1,2| \geq 0,1) \leq 0,48$

$\Leftrightarrow \quad P(X \leq 1,1 \cup X \geq 1,3) \leq 0,48$

La probabilité de s'écarter de l'espérance de plus de 0,1 est inférieure à 0,48
M_n donne l'espérance avec une précision de 0,1 et un risque de 0,48.

6) $P(|M_n - 1,2| \geq 0,01) \leq \dfrac{0,48}{0,01^2 n}$

$\dfrac{0,48}{0,01^2 n} = 0,48 \Leftrightarrow 4800 = 0,48\, n \Leftrightarrow n = 10\,000$

Pour $n \geq 10\,000$ la probabilité que la moyenne s'écarte de 0,01 est inférieure à 0,48.

∽ Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord ∽

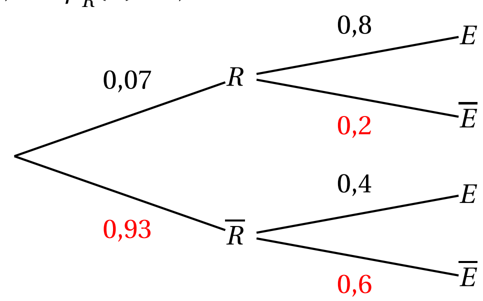
21 mai 2024 Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
$p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.
L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\quad p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :
$p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.
Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.
Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.
D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.
Conclusion : il faut que $N \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.