Exercice 1

a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs

1	2	3
-3	1	2

$1\times1 \neq -3\times2$

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles
donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires
donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles

b) Cherchons si ces deux droites ont un point commun M

$M(x;y;z)\in(d_1)\cap(d_2) \iff \begin{cases} 2+t = 1-3s \\ -3+2t = -2+s \\ 2+3t = 2+2s \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{t+3s = -1} \\ \boxed{2t - s = 1} \\ 2+3t = 2+2s \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t+3s = -1 \\ 6t-3s = 3 \\ 2+3t = 2+2s \end{cases} \iff \begin{cases} 7t = 2 \\ s = 2t-1 \\ 2+3t = 2+2s \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{2}{7} \\ s = -\frac{3}{7} \\ 2+3t = 2+2s \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = \frac{2}{7} \\ s = -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} = -\frac{6}{7} \text{ faux} \end{cases}$

Le système n'a pas de solution
donc les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires

c) $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = -3+2+6 = 5 \neq 0$

Les droites ne sont pas orthogonales et elles ne sont pas non plus perpendiculaires.

Exercice 2

1 a

2 c

3 b

4 d

Exercice 3

1) $C(4;4;0)$ $F(4;0;4)$ $G(4;4;4)$ $H(0;4;4)$

2) $I(2;0;4)$ $\vec{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

$$M(x;y;z)\in(IC) \Leftrightarrow \vec{IM}=t\,\vec{IC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2t\\ y=4t\\ z-4=-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t\\ y=4t\\ z=4-4t\end{cases}$$

0,5

3) a) $\vec{IC}$ est un vecteur normal de P

$$M\in P \Leftrightarrow 2(x-4)+4(y-4)-4(z-4)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+4y-4z-8=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-2z-4=0$$

b) $$J(x,y,z)\in P\cap(IC) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t\\ y=4t\\ z=4-4t\\ x+2y-2z-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t\\ y=4t\\ z=4-4t\\ (2+2t)+2(4t)-2(4-4t)-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2\frac{5}{9}\\ y=4\cdot\frac{5}{9}\\ z=4-4\cdot\frac{5}{9}\\ 18t=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{28}{9}\\ y=\frac{20}{9}\\ z=\frac{16}{9}\\ t=\frac{5}{9}\end{cases}$$

donc $J\left(\frac{28}{9};\frac{20}{9};\frac{16}{9}\right)$

J est le projeté orthogonal du point C sur le plan P.

c) $0+2\times(2)-2(0)-4=0$
donc $K\in P$

$4+0-0-4=0$
donc $B\in P$

1) $\left.\begin{array}{l} K \in P \\ K \in (ABC) \end{array}\right\}$ donc $K \in P \cap (ABC)$

$\left.\begin{array}{l} B \in P \\ B \in (ABC) \end{array}\right\}$ donc $B \in P \cap (ABC)$

$$(BK) = P \cap (ABC)$$

<u>Remarque</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs normaux. Ils sont non colinéaires donc les plans sont sécants et leur intersection est une droite

4a) $$\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{CBK} \times GC$$
$$= \frac{1}{3} \times 8 \times 4$$
$$= \frac{32}{3} \text{ u.v.} \quad \text{(unité de volume)}$$

b) les points B, K, G forment un plan car ils ne sont pas alignés
On peut vérifier que $\vec{BK}$ et $\vec{BG}$ ne sont pas colinéaires

$B \in P$ d'après 3 a)

$0 + 2(2) - 4 = 0$ donc $K \in P$

$4 + 8 - 8 - 4 = 0$ donc $G \in P$

$(BKG) \subset P$ donc $(BKG) = P$

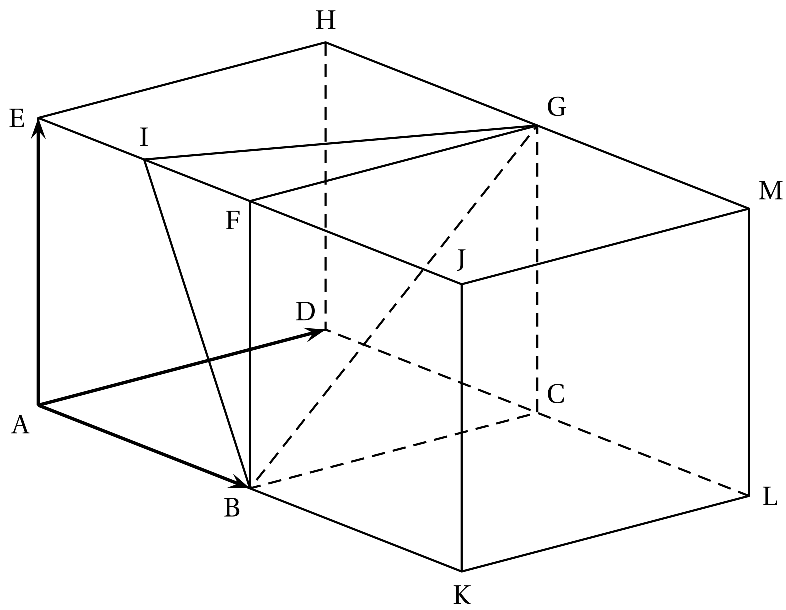
c) $$\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BKG} \times JC$$
$$\mathcal{A}_{BKG} = \frac{3 \mathcal{V}_{CBKG}}{JC}$$
$$= \frac{3 \times \frac{32}{3}}{\frac{8}{3}} = 12 \text{ u.a.}$$

$$JC \begin{pmatrix} 8/9 \\ 16/9 \\ -16/9 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{JC}\| = \sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{8}{3}$$

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;0\,;1),\qquad G(1\,;1\,;1)\quad \text{et}\quad J(2\,;0\,;1).$$

1. Puisque ABCDEFGH et BKLCFJMG sont des cubes on a FG = BF = EH = AD = 1 et comme I est le milieu de [EF], on a $FI = \dfrac{1}{2}\times EF = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$.

En prenant comme base le triangle rectangle isocèle BFG et la hauteur [FI], on a donc :

$V_{\text{FIGB}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$ (unité de volume).

2. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$. les coordonnées de I sont donc : $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$.

3. Avec J(2 ; 0 ; 1) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.

De G(1 ; 1 ; 1) on obtient $\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{\text{DJ}} \cdot \overrightarrow{\text{BI}} = -1+0+1 = 0$ et

$\overrightarrow{\text{DJ}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = 0-1+1 = 0$.

Conclusion $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal à deux vecteurs non colin"aires du plan (BIG) : c'est un vecteur normal à ce plan.

4. On sait donc d'après la question précédente que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(BIG)} \iff 2x-1y+1z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or B(1 ; 0 ; 0)$\in$ (BIG) $\iff 2\times 1-1\times 0+1\times 0+d=0 \iff 2+d=0 \iff d=-2$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(BIG)} \iff 2x-1y+1z-2=0$

5. La droite d orthogonale à (BIG) a un vecteur directeur colinéaire à $\overrightarrow{\text{DJ}}$.

On a F(1 ; 0 ; 1). D'autre part donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in d \iff$

$$\overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{\text{DJ}},\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 2t\\ y-0 &=& -t\\ z-1 &=& t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

6. **a.** Si L$'(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à d et au plan (BIG) ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de d et l'équation du plan (BIG) soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+t\\ 2x-y+z-2 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2=0 \iff 2+4t+t+1+t-2=0 \iff 6t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{6}$ et en remplaçant dans x, y et z, on obtient $x=1+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$, $y=-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$ et $z=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

Conclusion avec L$'=d\cap$ (BIG), $\quad \text{L}'\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL. Avec $\overrightarrow{\text{FL}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

on a $\text{FL}'^2 = \left\|\overrightarrow{\text{FL}}\right\|^2 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{4}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{6}{36}$,

donc $\text{FL}'=\sqrt{\dfrac{6}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

c. En prenant comme base le triangle (BIG) le tétraèdre FIGB a pour hauteur [FL$'$] ; on a donc

$$V_{\text{FIGB}} = \text{aire (BIG)}\times[\text{FL}']\times\frac{1}{3} \iff \frac{\frac{1}{12}\times 3}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \text{aire (BIG)} = \frac{\sqrt{6}}{4}.\ \text{(unités d'aire)}$$