

Exercice 1 (5 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g définie sur $]2; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 - 2\ln(x)$$

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} .
4. En déduire le signe de la fonction g sur $]2; +\infty[$

PARTIE B : Etude de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x - 2}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. (C) désigne la courbe représentative de la fonction f .

1. Déterminer la limite de f en 2 et interpréter graphiquement.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer qu'elle a le même signe que g sur $]2; +\infty[$
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}$, en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 2 (3 points)

1) Déterminer le plus petit entier n tel que :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.98$$

2) Résoudre l'équation suivante après avoir étudié l'ensemble de définition.

$$\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln(x + 5)$$

3) Résoudre l'inéquation suivante :

$$\ln\left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right) \leq 0$$

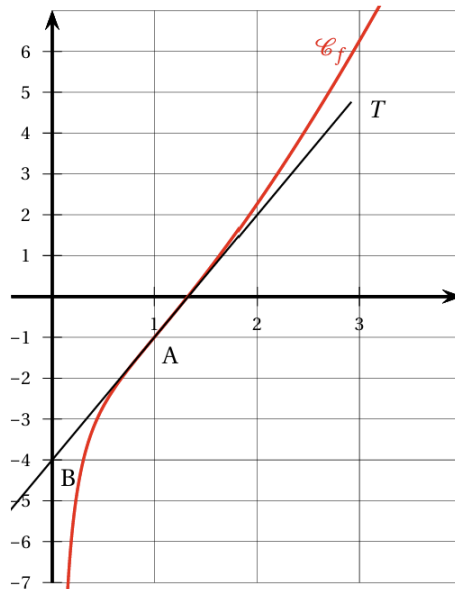
Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (\mathcal{C}_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T), tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point A de coordonnées $(1; -1)$. Cette tangente passe également par le point B $(0; -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe (\mathcal{C}_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Exercice 4 (5 points)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1.
 - a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 - b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 - d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

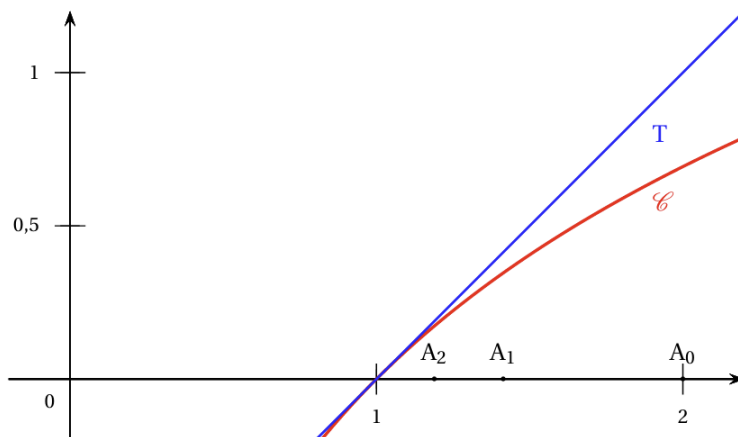
Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} de la fonction \ln et la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite T est $y = x - 1$.

Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99; 1,01[$.

- a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
- b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
- c. Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
- On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à \sqrt{a} .

```

from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L

```

Exercice 5 (2 points)

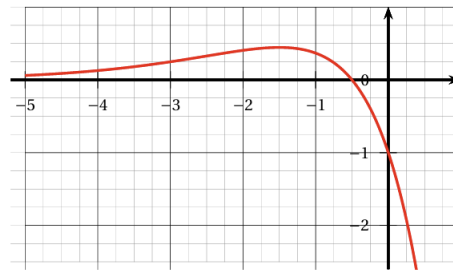
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} . La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.

On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f .



Question 1 :

- a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;
- b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;
- c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;
- d. Au point d'abscisse -1 , la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Question 2 :

- a. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$;
- b. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$;
- c. La courbe \mathcal{C}_f représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion;
- d. La fonction f est concave sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

Question 3 :

La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

- a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$;
- b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; -1]$;
- c. $f''(-\frac{3}{2}) = 0$;
- d. $f''(-3) = 0$.