Exercice 1

PARTIE A

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2 - 2\ln x) = -2\ln 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln x = -\infty$

F.I du type $+\infty - \infty$

$g(x) = x\left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$

croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}\right) = 1$

Par produit de limites on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$

$g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$

Etude du signe de $g'(x)$

$\forall x \in]2;+\infty[\quad x - 2 > 0 \quad , \quad x > 0$

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-2\ln 2$ ↗	$+\infty$

3) Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ la fonction g est continue et strictement croissante.

$-2\ln 2 < 0$ donc $0 \in]-2\ln 2 ; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution, notée α, sur $]2;+\infty[$

Par balayages successifs, on obtient :

$$5 < \alpha < 6$$
$$5{,}3 < \alpha < 5{,}4$$
$$5{,}35 < \alpha < 5{,}36$$

4) D'après le tableau de variations de g

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 2^+} x \ln x = \underbrace{2\ln 2}_{>0}$

Par quotient de limites $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

asymptote verticale d'équation $x = 2$

2) $f(x) = \dfrac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) f du type $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x\ln(x)$ $\quad v(x) = x - 2$

$u'(x) = \ln x + 1 \quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-2) - x\ln x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2\ln x - 2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in]2;+\infty[\quad (x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

4)

x	2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $g(\alpha) = 0 \iff 0 = \alpha - 2 - 2\ln\alpha \iff \alpha = 2 + 2\ln\alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha \cancel{\ln\alpha}}{2\cancel{\ln\alpha}} = \frac{\alpha}{2}$$

D'après Partie A $\qquad 5{,}35 < \alpha < 5{,}36$

$$2{,}675 < \frac{\alpha}{2} < 2{,}680$$

Exercice 2

1) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}98 \iff 1 - 0{,}98 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}02 \iff \ln\left(\frac{5}{6}^n\right) \leq \ln(0{,}02)$

$\iff n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}02) \iff n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(5/6)}$

$n = 22$

2) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1/2 \\ x > 3 \\ x > -5 \end{cases} \iff x > 3 \qquad D_f =]3 ; +\infty[$

$$\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$$
$$\ln\left[(2x+1)(x-3)\right] = \ln\left[x+5\right]$$

$$2x^2 - 5x - 3 = x + 5$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$x = -1$ ou $x = 4$

$-1 \notin D_f$ $\quad$ $4 \in D_f$

$$S = \{4\}$$

3)

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\left]-\infty ; -\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[= D_f$$

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \leq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1-(x-1)}{x-1} \leq 0$$

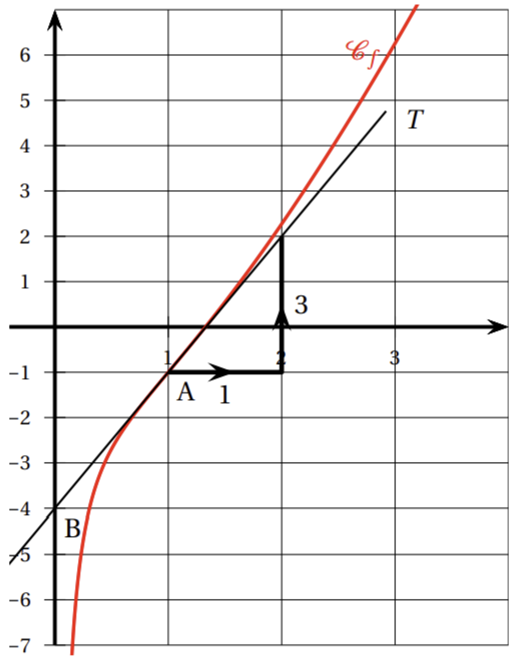
$$\frac{x+2}{x-1} \leq 0$$

$[-2 ; 1[\cap D_f$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	

$$S = \left[-2 ; -\tfrac{1}{2}\right[$$

Exercice 3 (5 points)



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.

L'ordonnée à l'origine est égale à -4, donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2.
- il semble que f est concave sur $]0\,;1[$;
- il semble que f est convexe sur $]1\,;\,+\infty[$.

Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B : étude analytique

1.
- On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$; donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Avec $f(x) = 2x\ln x - \dfrac{1}{x}$, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de zéro.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \ln\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et l'on a :

$f'(x) = \ln\left(x^2\right) + x \times \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = \ln\left(x^2\right) + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ ou $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :

$f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^2-2}{x^3} = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3. a. Comme $x^3 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1 > 1 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.

Conclusion :

- Sur $]0\,;\,1[$, $x<1$, $f''(x)<0$: la fonction est concave ;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $x>1$, $f''(x)>0$: la fonction est convexe ;
- pour $x=1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur $]0\,;1[$ puis croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f'(1)=2+1=3$ (vu à la question **1.**).

Comme 3 est le minimum de f', on en déduit que $f'(x)>0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. a. Tableau de variations de f :

x	0		1		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗		↗	
f	‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$\approx 2,27$	↗	$+\infty$

Sur l'intervalle $]1;\,2[$ la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1)<0$ et $f(2)>0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha\in]1\,;\,2[$ tel que $f(\alpha)=0$.

b. La calculatrice donne $f(1,3)\approx-0,09$ et $f(1,4)\approx 0,23$ donc $1,3<\alpha<1,4$, puis $f(1,32)\approx-0,02$ et $f(1,33)\approx 0,007$, d'où $1,32<\alpha<1,33$ et enfin

$f(1,327)\approx-0,003$ et $f(1,328)\approx 0,0004$, donc $\alpha\approx 1,33$ au centième près.

On sait que α est solution de $f(x)=0 \iff x\ln\left(x^2\right)-\dfrac{1}{x}=0 \iff$

$x\ln\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :

$\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right)=\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \iff x^2=\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

α vérifie cette équation donc $\alpha^2=\exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Exercice 4 (5 points)

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. **a.** $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

   b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. **a.** Posons, pour tout entier naturel n, l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \implies \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$
car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$
$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

   Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

   Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

   b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

   Et pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

   Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

   c. Soit $x \in [0\,;\,+\infty[$:
$\sqrt{x} = x \iff x = x^2$ car $x \geqslant 0$
$\iff x^2 - x = 0$
$\iff x(x-1) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = 1$

   L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0\,;\,+\infty[$: 0 et 1.

   d. La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

   D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geqslant 1$ donc $\ell = 1$.

   donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Partie B

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$: $\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

   b. On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$.

   c. Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$ donc $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. **a.** À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1{,}01$ et $u_7 \approx 1{,}005\,43$ donc $k = 7$.

   b. On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0{,}005\,43$.

   c. D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0{,}005\,43$ c'est à dire $0{,}695$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =2**n *(a-1)
return L
```

Exercice 5 (2 points)

Question 1 : b

Question 2 : a

Question 3 : c