Exercice 1 (6 points)

Soit $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-2}$

1) Donner D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Préciser s'il existe des asymptotes.

3) Déterminer la fonction dérivée.

4) Donner le tableau de variation de f.

5) Montrer que l'on a : $\forall x \in D_f,\ f(x) = x + 3 + \dfrac{6}{x-2}$

6) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+3)]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+3)]$
Quelle conclusion faire de ces deux résultats ?

7) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

8) QUESTION BONUS :
Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = -x + 2$. Si oui en quels points ?

Exercice 2 (4 points)

Calculer les limites en justifiant.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x^2}{e^{2x} - x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{4x^2+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(3x-6)^3}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+2}\right]$

Exercice 3 (3 points)

Déterminer les dérivées

$f(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{3x}$

$g(x) = \dfrac{1 - 2e^x}{3e^x + 1}$

$h(x) = \sqrt{1 - 4x}$

$k(x) = \dfrac{1}{(4x^2+1)^2}$

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$

1) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Dresser le tableau de variations de g.
3) En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

2) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(x)$

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que l'on a : $-1 < \alpha < 0$

PARTIE C

1) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
2) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

PARTIE D
Nous avons vu à la partie B que f s'annule en un unique réel α compris entre -1 et 0.
On considère le script suivant écrit en Python :

1) Quelle valeur affiche l'algorithme ci-dessous lorsque l'on entre $k = 1$? $k = 2$? $k = 3$?

```
from math import*
def f(x):                   # on définit la fonction f
  return(x+1+x/exp(x))


k=int(input("k="))          # l'utilisateur choisit une
a=-1                        # une valeur entière pour k
while f(a+10**(-k))<0:
  a=a+10**(-k)
print(a)
```

2) Quel est le rôle de cet algorithme ?