Exercice 1

1) $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} x(x+1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, on obtient $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$

3) f est dérivable sur son ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$$

4) $\forall x \in D_f \quad (x-2)^2 > 0$

le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $x^2 - 4x - 2$

$\Delta = 16 - 4(1)(-2)$

$\Delta = 24 = (2\sqrt{6})^2$

$x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$

$x_2 = 2 - \sqrt{6}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(2-\sqrt{6})$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(2+\sqrt{6})$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2-\sqrt{6}) \approx 0{,}1$

$f(2+\sqrt{6}) \approx 9{,}9$

5) $$x+3+\frac{6}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)+6}{x-2}$$

$$= \frac{x^2+3x-2x-6+6}{x-2}$$

$$= \frac{x^2+x}{x-2}$$

$$= f(x)$$

6) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+3+\frac{6}{x-2}-(x+3)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x-2}$$

$$= 0$$

De même $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right] = \lim_{-\infty}\frac{6}{x-2} = 0$

La droite d'équation $y = x+3$ est donc une asymptote oblique à la courbe de f.

7) Tangente en 1

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = -5(x-1)-2$

$\boxed{y = -5x+3}$

8) Soit (Δ) la droite d'équation $y = -x+2$

le coefficient directeur est -1

Il faut donc résoudre $f'(x) = -1$

$$f'(x) = -1 \iff \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2} = -1$$

$$\iff x^2-4x-2 = -(x-2)^2$$

$$\iff 2x^2-8x+2 = 0$$

$$\iff x^2-4x+1 = 0$$

$\Delta = (2\sqrt{3})^2$ $\qquad x_1 = 2+\sqrt{3}$ et $x_2 = 2-\sqrt{3}$

Il existe deux tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = -x+2$:
- la tangente au point $A_1(x_1 ; f(x_1))$
- la tangente au point $A_2(x_2 ; f(x_2))$

Exercice 2

a) $$\frac{\cancel{e^x}\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(e^x - \frac{x}{e^x}\right)}$$

D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{x^2}{e^x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+x^2}{e^{2x}-x} = 0^+$

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4x^2+1} = \frac{1}{4} \\ \lim\limits_{y \to \frac{1}{4}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{4}} \end{array}\right\}$$

Par composition de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2+1}} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} (3x-6) = 0^-$; $\lim\limits_{z \to 0^-} z^3 = 0^-$ $\Bigg\}$ $\lim\limits_{x \to 2^-} (3x-6)^3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(3x-6)^3} = -\infty$

d) Multiplication par la quantité conjuguée

$$A = \frac{\left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}\right)}{\left(\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}\right)}$$

$$A = \frac{(3x-1) - (3x+2)}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}}$$

$$A = \frac{-3}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}} = 0^-$

Exercice 3

$$f'(x) = (2x-2)e^{3x} + 3(x^2-2x+5)e^{3x} = (3x^2-4x+13)e^{3x}$$

$$g'(x) = \frac{-2e^x(3e^x+1) - (1-2e^x)3e^x}{(3e^x+1)^2} = \frac{-5e^x}{(3e^x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$

$k(x) = (4x^2+1)^{-2}$ $\qquad$ $k'(x) = -2(4x^2+1)^{-3} \times 8x = \dfrac{-16x}{(4x^2+1)^3}$

Exercice 4

(A) 1) *) $g(x) = x\left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}\right)$

Théorème de croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ le produit donne $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

*) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty \end{array}\right\}$ la somme donne $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) = -1 + e^x$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0) = 2$

3) D'après ce tableau on a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 2$ donc $g(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

B) 1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim x+1 = -\infty$

Croissance Comparées $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $e^x \neq 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (x+1)' + \left(\frac{x}{e^x}\right)'$$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - x}{e^x}$$

$$f'(x) = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x} g(x)$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$, $g(x) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

4) $f(-1) = -e \approx -2{,}7$

$f(0) = 1$

Sur $]-1;0[$ la fonction f est continue et strictement croissante

De plus $0 \in]f(-1); f(0)[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et $-1 < \alpha < 0$.

C) 1) Tangente à $\mathcal{C}$ en 0

$$T : y = f'(0)x + f(0)$$
$$T : y = 2x + 1$$

2) $\Delta(x) = f(x) - T(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x+1)$

$$\Delta(x) = -x + \frac{x}{e^x} = x\left(-1 + e^{-x}\right)$$

$$-1 + e^{-x} \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff e^{-x} \geqslant e^0 \iff x \leqslant 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(-1+e^{-x})$		+	0	−	
x		−	0	+	
$\Delta(x)$		−	0	−	

Pour tout réel $x \neq 0$ $\Delta(x) < 0$ c'est à dire $f(x) < T(x)$

Pour tout réel non nul la tangente T est strictement au-dessus de $\mathcal{C}$. Il y a un point de contact, le point $A(0\,;1)$

D)

1) quand $k = 1$, l'algo affiche $a = -0{,}5$

quand $k = 2$, l'algo affiche $a = -0{,}41$

quand $k = 3$, l'algo affiche $a = -0{,}402$

2) Cet algorithme donne la valeur arrondie par excès à 10^{-k} près pour une valeur k entrée par l'utilisateur.