Exercice 1 (6 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.
Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de 1,3 °C.

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$

2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

- **a.** Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
- **c.** En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7.
- **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
- **b.** Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
- **c.** Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= ........................
    while T ..................
        T= ................
        n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

Exercice 2 (2 points)

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1,u_2,u_3,u_4.
2) Conjecturer une expression de u_n en foncion de n.
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 3 (8 points)

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite si elle existe. Justifier.

$A_n = \dfrac{5n^2 - 1}{3n^2 + 5n + 10}$

$B_n = -6^n + 5^n$

$C_n = \dfrac{n^3 + n}{n^3\sqrt{n} + n}$

$D_n = n + 2(-1)^n$

$W_n = \dfrac{1 + (1.01)^n}{1 + (-0.99)^n}$

$X_n = \dfrac{3 + t_n}{t_n - 3}$ où $t_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

$Y_n = 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 + ... + 0.6^n$

$Z_n = 1 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{16}{9} + ... + \dfrac{4^n}{3^n}$

Exercice 4 (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.