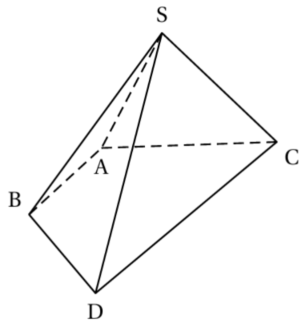
Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 5 pts Ex2 : 6 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 4 pts

Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1); B(4 ; −1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule
   $$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$
   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Exercice 2 (6 points)

PARTIE A

Une plateforme informatique propose deux types de jeux video : un jeu de type A et un jeu de type B.
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

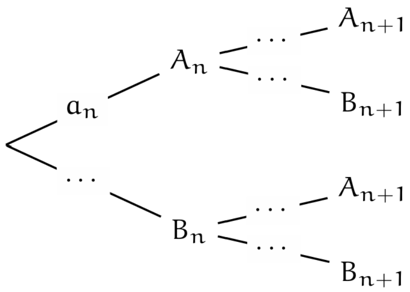
-si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8.

-si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :
A_n :"la nième partie est une partie de type A.
B_n :"la nième partie est une partie de type B.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessus.



2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} = 0.5a_n + 0.3$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. La suite (a_n) est donc définit par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0.5a_n + 0.3$

3) Etude d'un cas particulier. Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a) Montrer par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

4) Etude du cas général. Dans cette question, le réel a appartient à $[0;1]$.
On considère la suite (u_n)définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = a_n - 0,6$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$

c) Déterminer la limite de la suite (a_n) . Cette limite dépend-t-elle de la valeur de a ?

d) La plateforme diffuse une publicité insérée au début des parties de type A et une autre insérée au début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux video ?

PARTIE B

Une entreprise de peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. On constate que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.

1) Le responsable qualité du site choisit au hasard 50 peluches, de manière indépendante. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de peluches **qui ne seront pas acceptées** à l'issue des tests.
a) Quelle est la loi suivie par X
b) Calculer $P(X = 6)$
c) Calculer $P(X > 10)$

2) Le responsable qualité du site choisit au hasard n peluches, de manière indépendante.
a) Déterminer la probabilité p_n, que cet échantillon contienne au moins une peluche qui ne sera pas acceptée à l'issue des tests.
b) En résolvant une inéquation, déterminer n pour que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

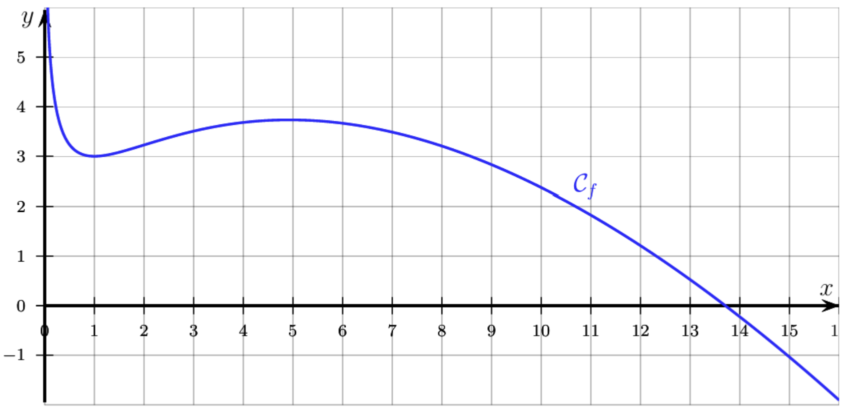
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\ ;\ +\infty[$:
   1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ci-dessous.
On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   b) En déduire le tableau des variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.
   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

   $$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

   $$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

   b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

   Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
from math import*
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while log(2)-u ....
    n=n+1
    u=....
  return(u,n)
```

   c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().