Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 6 pts Ex2 : 7 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 4 pts

Exercice 1 (6 points)

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{AC}}=-3x_{\overrightarrow{AB}}$, mais $y_{\overrightarrow{AC}}\neq -3y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD}=4\times\overrightarrow{AB}+0\times\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

b. À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD}=4\times\overrightarrow{AB}+0\times\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD}=4\times\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. **a.** Comme on est dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times1+1\times0+2\times(-1)=2+0-2=0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-3)+1\times4+2\times1=-6+4+2=0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont aussi orthogonaux;

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation de la forme : $2x+y+2z+d=0$, où d est un réel donné.

De plus,
$$\begin{aligned}A\in(ABC) &\iff 2x_A+y_A+2z_A+d=0\\ &\iff 2\times3+(-1)+2\times1+d=0\\ &\iff 6-1+2+d=0\\ &\iff d=-7\end{aligned}$$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x+y+2z-7=0$.

c. Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ. Et si la droite passe par S, de coordonnées (2 ; 1 ; 4), on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases}x=x_S+x_{\vec{n}}t\\ y=y_S+y_{\vec{n}}t\\ z=z_S+z_{\vec{n}}t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\quad \text{ce qui donne ici :}\quad \begin{cases}x=2+2t\\ y=1+t\\ z=4+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$$

d. On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ.

$$\begin{aligned}M_t\in(ABC) &\iff 2x_{M_t}+y_{M_t}+2z_{M_t}-7=0\\ &\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0\\ &\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0\\ &\iff 9t+6=0\\ &\iff t=\frac{-2}{3}\end{aligned}$$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t=\frac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2+2\times\frac{-2}{3}\ ;\ 1+\frac{-2}{3}\ ;\ 4+2\times\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on a donc :

$\text{SI} = \sqrt{(x_I - x_S)^2 + (y_I - y_S)^2 + (z_I - z_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$

On arrive bien à SI = 2 unités graphique, et comme $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien SI = 2 cm.

4. **a.** Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{\text{BH}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CH}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{BH}} = 4 \times (-1) + 0 \times 4 + (-4) \times -1 = -4 + 0 + 4 = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{\text{CH}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{CD}}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

On a $\text{BH} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

b. On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

- $\text{AB} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ cm ;
- Comme on a $\overrightarrow{\text{CD}} = 4 \times \overrightarrow{\text{AB}}$, on a notamment, $\text{CD} = |4| \times \text{AB} = 4\sqrt{2}$ cm.

L'aire du trapèze ABDC est donc : $\mathcal{A}_{\text{ABDC}} = \dfrac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15\,\text{cm}^2$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathcal{V}_{\text{ABDCS}} = \dfrac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10\,\text{cm}^3$.

Exercice 4 (4 points)

1. **a.** Résolvons, dans [0 ; 1], l'équation demandée :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\
&\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\
&\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)
\end{aligned}$$

Or, 0 et ln(2) sont deux réels dans [0; 1] (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \mathrm{e} \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans [0 ; 1] : 0 et ln(2).

b. f est dérivable sur [0 ; 1], en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x} = 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2 \times 0\mathrm{e}^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		+	
signe de $(1-x)$		+	0
signe de e^{-x}		+	
signe de $f'(x)$		+	0
variations de f	0	↗	$2\mathrm{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 2\times 0,1\mathrm{e}^{-0,1} \approx 0,18$.
On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie.
Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :
Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1) \\ &\quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1} \\ &\quad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1 \\ &\quad \text{car } 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74 < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :
$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0$.
Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.
On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que $\ln(2) - u_n > 0,0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0,0001$.
Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).
On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

Exercice 3

5

PARTIE A

1) $g(1)=0$ $\quad g(e)=e-2$ $\quad$ 0,5

2) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissances comparées)

$\lim\limits_{x\to 0} 2(x-1) = -2$

Par somme de limite $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -2$

0,25

3) $g'(x) = 2-\left(1\times \ln x + x\times \frac{1}{x}\right)$

$g'(x) = 1-\ln x$ $\quad$ 0,5

$g'(x)\geqslant 0 \iff 1-\ln x\geqslant 0 \iff 1\geqslant \ln x \iff e\geqslant x$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -2	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

0,5

4) Sur $]0;e]$

- g est continue
- g est strictement croissante
- $0\in]-2;e-2]$

D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ a une unique solution sur l'intervalle $]0,e]$

1 est la solution

Sur $]e;+\infty[$

- g est continue
- g est strictement décroissante
- $0\in]-\infty;e-2[$

$g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]e;+\infty[$

0,75

Finalement l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$. Ces solutions sont 1 et α

$4 < \alpha < 5$

$4{,}9 < \alpha < 5$

$4{,}92 < \alpha < 4{,}93$

Par balayages successifs, on a obtenu

0,25

5) D'où le signe de g sur $]0;+\infty[$

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

0,25

PARTIE B

1) $f(x) = x(3-\ln x) - 2\ln x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3-\ln x) = -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x(3-\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty$

Par somme

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,25

2) a)

$$f'(x) = 3 - \left(1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x - (\ln x + 1)x - 2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 - x\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - x\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

0,5

Sur $]0;+\infty[$ $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

0,5

3) $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$

$f''(x)$ est du signe de $2-x$

$2-x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 \geqslant x$

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe		concave	

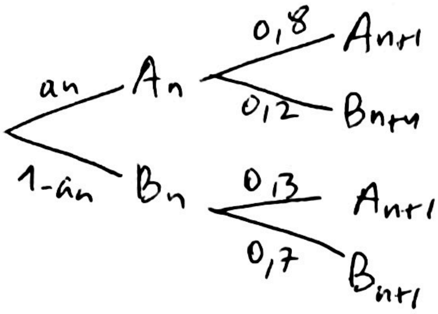
0,5

$\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion de coordonnées $(2\ ;\ 6-4\ln 2)$

0,25

Exercice 2

1)



2) $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$

$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$

$= 0{,}8\, a_n + 0{,}3\,(1 - a_n)$

$= 0{,}8\, a_n + 0{,}3 - 0{,}3\, a_n$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}3$

3) $a = 0{,}5$

a) Initialisation :

$0 \leq a_1 \leq 0{,}6$

vrai pour $n = 1$ car $a_1 = 0{,}5$

Hérédité : Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq a_n \leq 0{,}6$

$0 \times 0{,}5 \leq 0{,}5 \times a_n \leq 0{,}5 \times 0{,}6$

$0{,}3 \leq 0{,}5\, a_n + 0{,}3 \leq 0{,}3 + 0{,}3$

$0 \leq 0{,}3 \leq a_{n+1} \leq 0{,}6$

L'hérédité est montrée

b) Initialisation :

$a_1 = 0{,}5$

$a_2 = 0{,}55$

$a_1 < a_2$

Hérédité : On suppose qu'il existe n tel que $a_n \leq a_{n+1}$

$0{,}5\, a_n \leq 0{,}5\, a_{n+1}$ car $0{,}5 > 0$

$0{,}5\, a_n + 0{,}3 \leq 0{,}5\, a_{n+1} + 0{,}3$

$a_{n+1} \leq u_{n+2}$

L'hérédité est montrée

On a montrée que pour tout $n \geq 1$ $a_{n+1} \geq a_n$

Donc la suite (a_n) est croissante

c) La suite (a_n) est une suite croissante et majorée par 0,6 donc, elle converge.

Théorème du point fixe f est continue sur $\mathbb{R}$

si (u_n) converge vers L alors L est la solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \iff 0,5x + 0,3 = x \iff 0,5x = 0,3 \iff x = 0,6$

Par conséquent, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,6$

4) a) $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$

$= 0,5\,a_n + 0,3 - 0,6$

$= 0,5\,a_n - 0,3$

$= 0,5\,(a_n - 0,6)$

$= 0,5\,u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$

On a donc $\forall n \geq 1$ $u_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

b) $\begin{cases} u_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} \\ u_n = a_n - 0,6 \end{cases}$ cela donne $a_n - 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

0,5

$\boxed{a_n = 0,6 + (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car du type q^n avec $-1 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6 + (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} = 0,6$ Cette limite ne dépend pas de a.

d) Puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$ cela signifie que la probabilité est de 0,6 au bout d'un grand nombre de partie donc supérieure à 0,5 donc la publicité la plus vue devrait être celle de type A.

PARTIE B

1) a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50\ ;\ 0{,}1237)$

équivalent à un tirage avec remise

Loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}1237$

b) $P(X=6) = \binom{50}{6} (0{,}1237)^6 (0{,}8763)^{44} \approx 0{,}171$

c) $P(X>10) = P(X \geqslant 11) \approx 0{,}039$

2) a) $p_n = 1 - P(X=0)$

$\Leftrightarrow p_n = 1 - (0{,}8763)^n$

b) On cherche n tel que

$$1 - (0{,}8763)^n \geqslant 0{,}99$$

$$0{,}01 \geqslant (0{,}8763)^n$$

$$\ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}8763^n)$$

$$\ln(0{,}01) \geqslant n \ln(0{,}8763) \qquad \ln(0{,}8763) < 0$$

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8763)}$$

$$n \geqslant 35$$

le nombre cherché est $n = 35$