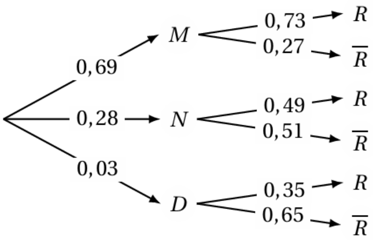
Exercice 1 (8 points)

Partie A

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 = 0,6514$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

   $P_R(N) = \dfrac{P(R \cap N)}{P(R)} = \dfrac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \dfrac{686}{3257} \approx 0,2106$ au dix-millième près.

Partie B

1. **a.** On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement R, de probabilité $p = 0,6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

   C'est donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,6514)$ que suit X.

   b. On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $P(X = 14) = \dbinom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \dbinom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^{6} \approx 0,1723$ au dix-millième près.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0,6514)$

   a. On a $p_n = P(X_n = 0) = \dbinom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0,3486^n$.

   La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0,3486^n$

   b. L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre :

   $$\begin{aligned}
   1 - p_n \geqslant 0,9999 &\iff -p_n \geqslant -0,0001\\
   &\iff p_n \leqslant 0,0001 \qquad \text{car } -1 < 0\\
   &\iff 0,3486^n \leqslant 0,0001\\
   &\iff n\ln(0,3486) \leqslant \ln(0,0001) \qquad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
   &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} \qquad \text{car } 0,3486 < 1 \text{ donc } \ln(0,3486) < 0
   \end{aligned}$$

   Or, on a $\dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} \approx 8,7$ et comme n est un entier, on en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 2

Z . . . 9

1) $A = 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10$

$A = 26^3 \times 10^2$

$A = 1\,757\,600$

2) $B = 26^2 \times 10 = 6760$

3) $C = 26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 = A\binom{26}{3} \times A\binom{10}{2}$

$C = 1\,404\,000$

4) $D = 3! \times 2!$

$D = 6 \times 2$

$D = 12$

Exercice 3

1) $\binom{26}{4} = \dfrac{26!}{22!\,4!} = 14\,950$

2) $\binom{20}{4} = 4845$

3) $14950 - 4845 = 10105$

4) $P\left(\text{"une voyelle trois consonnes"}\right) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{20}{3}}{\binom{26}{4}} = \dfrac{6840}{14950} = \dfrac{684}{1495} \approx 0{,}458$

Exercice 4

a) Il y a 25 boules notées $A_1, A_2, A_3, \dots E_5$
On extrait simultanément 4 boules

$\binom{25}{4} = 12\,650$ figures possibles

b) Il faut placer 3 jetons dans 24 cases ou effectuer un tirage simultané de 3 boules parmi 24.

$\binom{24}{3} = 2024$ figures possibles

c) A_1 est libre donc tirage de 4 boules parmi 24

$$\binom{24}{4} = 10\,626$$

d) $\binom{23}{2} = 253$

e) $\binom{5}{4} \times 5 = 25$ figures possibles

ligne A, B ou C ou D ou E

on occupe 4 cases sur 5
c'est à dire que l'on laisse une case vide

f) $5 \times 5^4 = 5^5 = 3125$

$\binom{5}{4}$ le nombre de façons de choisir 4 lignes parmi 5.