# Exercice 1 (4 points)

**Question 1** : On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}'$ sont $(11 ; -9 ; -22)$ soit les coordonnées de $M_2$.

**Réponse b.**

**Question 2** : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est : $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

**Réponse c.**

**Question 3** :

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ou encore colinéaire au vecteur $-\frac{1}{3}\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-1\\+1\\2\end{pmatrix}$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ayant des vecteurs directeurs colinéaires au même vecteur sont donc parallèles.
De plus en remplaçant $t$ par $\frac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}'$ on obtient $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.
Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

**Réponse d.**

**Question 4** : $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{p}$ sont orthogonaux, soit :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{p} = 0 \iff -2\times 1 + 2\times m + 4\times(-2) = 0 \iff -2 + 2m - 8 = 0 \iff 2m = 10 \iff m = 5$.

**Réponse c.**

# Exercice 2 (5 points)

1. **a.**
   - Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
   - Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

   **b.** On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

   **c.**
   - Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
   - $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
   - $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

   Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

   **d.**
   - Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.
   - Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2 - 0 + 0 + d = 0$, ce qui veut dire que $d = -2$.

   Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note $d$ la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   **a.** La droite $d$ est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite $d$.

   Le point F appartient à la droite $d$ donc la droite $d$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{FM} = t.\overrightarrow{DJ} \iff \begin{cases} x-1 &= t\times 2 \\ y-0 &= t\times(-1) \\ z-1 &= t\times 1 \end{cases}$

Donc la droite $d$ a pour équation $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= \quad -t \\ z &= 1+\ t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

**b.** On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que $L\in d$, on cherche $t$ pour que $\begin{cases} \frac{2}{3} &= 1+2t \\ \frac{1}{6} &= \quad -t \\ \frac{5}{6} &= 1+\ t \end{cases}$

  On trouve $t = -\dfrac{1}{6}$ donc $L\in d$.

- Le plan (BGI) a pour équation $2x-y+z-2=0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} - 2 = 0$, donc $L\in$ (BGI).

Le point L est donc le point d'intersection de la droite $d$ et du plan (BGI).

**3. a.** La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- $IF = \dfrac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{FG\times FB}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

**b.** La droite $d$ est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite $d$, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$FL^2 = \left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ donc $FL = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times FL\times\mathcal{A} \iff \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\mathcal{A} \iff \dfrac{3\times\sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

L'aire du triangle BGI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

# Exercice 3 (6 points)

**2.** On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$.

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = -6+0+6=0$ : les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PR} = 2-10+8=0$ : les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

**3.** D'après le résultat précédent :

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in$ (PQR) $\iff 1x-5y+1z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or $P(6;0;0)\in$ (PQR) $\iff 1\times6-5\times0+1\times0+d=0 \iff d=-6$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in$ (PQR) $\iff x-5y+z-6=0$.

**Partie II**

1. • Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

   • Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD) , elles sont donc parallèles.

   Le quadrilatère (AEGC) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme ; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω.

   Comme G(8; 8; 8), les coordonnées de Ω sont donc $\left(\frac{0+8}{2}\,;\,\frac{0+8}{2}\,;\,\frac{0+8}{2}\right) = (4\,;\,4\,;\,4)$.

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\vec{n}$ et contient Ω, donc :
   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x-4 &=& t\times 1\\ y-4 &=& t\times(-5)\\ z-4 &=& t\times 1\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

3. L est le le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite $(d)$.

   L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite $(d)$, ses coordonnées vérifient donc le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\\ x-5y+z-6 &=& 0\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \Rightarrow 4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \iff 2+2t-20+25t =$
   $0 \iff 27t = 18 \iff 9\times 3t = 9\times 2 \iff 3t = 2 \iff t = \frac{2}{3}$.

   En reportant cette valeur de $t$ dans les trois premières équations du système, on trouve que $L\left(\frac{14}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$.

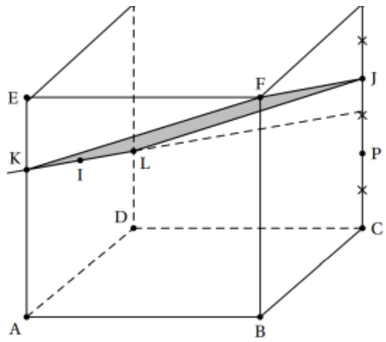
4. L étant le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR), la distance ΩL est la distance (la plus petite) du point Ω au plan (PQR); on a

   $\Omega L^2 = \left(\frac{14}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{14}{3}-4\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4+100+4}{9} = \frac{108}{9} =$
   $\frac{9\times 12}{9\times 1} = 12.$

   On a donc $\Omega L = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

## Exercice 4 (5 points)

*On considère un cube ABCDEFGH.*
*Soit I le centre de la face ADHE et J un point du segment [CG] tel que :* $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$




*On note* $(d)$ *la droite passant par I et parallèle à* $(FJ)$.

*On note K et L les points d'intersection de la droite* $(d)$ *et des droites* $(AE)$ *et* $(DH)$.

*On se place dans le repère* $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. *Donner les coordonnées des points F, I et J.*

   $F(1;0;1)$, $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ car $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ et $J\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$

2. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* $(d)$.

   $(d)=\left\{M/\overrightarrow{IM}=k\times\overrightarrow{FJ}\text{ , }k\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$, donc :

$$(d):\begin{cases}x=0\\ y-\frac{1}{2}=k\\ z-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}k\end{cases}\text{ , }k\in\mathbb{R}\iff\begin{cases}x=0\\ y=k+\frac{1}{2}\\ z=-\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\end{cases}\text{ , }k\in\mathbb{R}$$

3. **a.** *Montrer que le point de coordonnées* $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ *est le point K.*

   La droite $(AE)$ est l'ensemble des points vérifiant : $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z\end{cases}\text{ , }z\in\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{cases}K\in(d)\\ K\in(AE)\end{cases}\iff\begin{cases}0=0\\ k+\frac{1}{2}=0\\ z=-\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}0=0\\ k=-\frac{1}{2}\\ z=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}\text{, soit : }K\left(0;0;\frac{2}{3}\right).$$

   **b.** *Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites* $(d)$ *et* $(DH)$.

   La droite $(DH)$ est l'ensemble des points vérifiant : $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z\end{cases}\text{ , }z\in\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{cases}L\in(d)\\ L\in(DH)\end{cases}\iff\begin{cases}0=0\\ k+\frac{1}{2}=1\\ z=-\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}0=0\\ k=\frac{1}{2}\\ z=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{cases}\text{, soit : }L\left(0;1;\frac{1}{3}\right).$$

4. **a.** *Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.*

   On compare les vecteurs opposés :

   $\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$ : les vecteurs opposés sont égaux.

   Le quadrilatère FJLK possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur FJLK est un parallélogramme.

   **b.** *Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.*

   $\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$ donc : $FJ=\sqrt{0^2+1^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{10}{9}}$

   $\overrightarrow{FK}\left(-1;0;-\frac{1}{3}\right)$ donc : $FK=\sqrt{(-1)^2+0^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{10}{9}}$

   Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.