Exercice 1 (3 points)

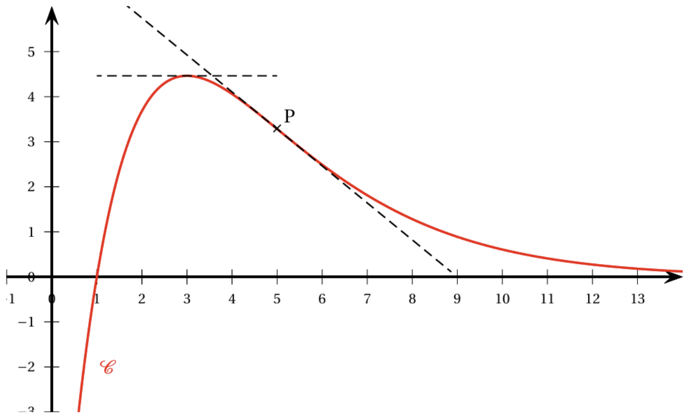
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



On a :

A. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;

B. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;

C. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe;

D. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 2 :

Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0,001 est :

a.
```
def racine(a, b) :
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

b.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

c.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

d.
```
def racine (a, b) :
    while abs (b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.
On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$.
Les valeurs de a et b sont :

A. $a = 2$ et $b = 3$

B. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$

C. $a = 4$ et $b = 1$

D. $a = 6$ et $b = 2$

Exercice 2 (6 points)

1) Déterminer le plus petit entier n tel que :
$1-\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0.999$

2) Résoudre les équations suivantes après avoir étudié l'ensemble de définition.

a) $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$

b) $\ln(-x-1)=\ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right)$

3) Soient les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$ et $g(x)=\ln(x+3)-\ln(2x+1)$

Déterminer les limites de f et g en $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0:+\infty[$ par :
$f(x)=x+4-4\ln(x)-\frac{3}{x}$

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2)On admet que la fonction f est dérrivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

3) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et la limite de f en $+\infty$. On admettra que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

4) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1.7$ et donner un encadrement 10^{-2} de chaque solution.

5) Etudier la convexité de la fonction f, c'est à dire préciser les parties de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lesauelles f est convexe et celles sur lesquelles f est concave. La courbe $\mathscr{C}$ admet-t-elle un(des) point(s) d'inflexion ? Si oui, préciser les coordonnées.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$
   b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que : $\ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$.
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.