

Exercice 1

1) D 2) D 3) D

Exercice 2

1) $1 - 0,999 > \left(\frac{1}{5}\right)^n$

1,5

$$\ln(0,001) > n \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} < n \quad \left(\text{on change le signe car } \ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0\right)$$

$$n \geq 5$$

le plus petit entier est 5.

2) a) Ensemble de définition en $D =]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\begin{cases} 6x-2 > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\ln[(6x-2)(2x-1)] = \ln x$$

2

$$\ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln x$$

$$12x^2 - 10x + 2 = x$$

$$12x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} \notin D$$

$$\frac{2}{3} \in D$$

la fonction $x \rightarrow \ln x$
est strictement croissante

Conclusion : $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

b) $-x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow -10 \geq x$
 $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

x	$-\infty$	-10	-2	$+\infty$
$-x-10$		+	0	-
$x+2$		-	0	+
$\frac{-x-10}{x+2}$		-	0	+

$-x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

L'ensemble de définition est $] -10 ; -2 [= D$

$\ln(-x-1) = \ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow (-x-1) = \frac{-x-10}{(x+2)}$

2

$\Leftrightarrow (-x-1)(x+2) = -x-10$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0$

$\Delta = 36 \quad x_1 = -4 \quad x_2 = 2$
 $x_1 \in D \quad x_2 \notin D$

Conclusion : $S = \{-4\}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\ln x}{x^2} = 0$ (par croissances comparées)

$g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$

1,5

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \ln(y) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Par composition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

Exercice 3

$$1) f(x) = x \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{4 \ln x}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{4 \ln x}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1$$

Par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

0,5

$$2) f'(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$$

0,5

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

$$3) \forall x \in]0; +\infty[\quad x^2 > 0$$

le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 4x + 3$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

1,5

$$\Delta = 4 > 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

x	0	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f			2		$+\infty$	

Diagram showing the function f increasing from $-\infty$ at $x=0$ to a local maximum of 2 at $x=1$, then decreasing to a local minimum of $6-4\ln 3$ at $x=3$, and finally increasing towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

$$f(1) = 5 - 3 = 2$$

$$f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,6$$

4) Sur l'intervalle $]0; 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante

- $1,7 \in]-\infty; 2]$

D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,7$ a une unique solution sur $]0; 1]$. C'est le nombre α

De la même manière, il y a une unique solution β sur l'intervalle $]1, 3]$
 car $1,7 \in [6 - 4 \ln 3; 2[$

De la même manière, il y a une unique solution γ sur l'intervalle $]3; +\infty[$
 car $1,7 \in]6 - 4 \ln 3; +\infty[$

Conclusion: l'équation $f(x) = 1,7$ a exactement trois solutions sur $]0; +\infty[$

$0 < \alpha < 1$	$2 < \beta < 3$	$3 < \gamma < 4$
$0,6 < \alpha < 0,7$	$2,1 < \beta < 2,2$	$3,9 < \gamma < 4$
$0,62 < \alpha < 0,63$	$2,11 < \beta < 2,12$	$3,97 < \gamma < 3,98$

5) f' est du type $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 3$ $u'(x) = 2x - 4$
 $v(x) = x^2$ $v'(x) = 2x$

$$f''(x) = \frac{(2x - 4)x^2 - (x^2 - 4x + 3)2x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 6x}{x^4}$$

1,5

$$f''(x) = \frac{4x - 6}{x^3}$$

le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $4x - 6$

$$x^3 > 0 \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 1,5$$

x	0	1,5	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	concave		convexe

\mathcal{C} admet un point d'inflexion de coordonnées $(1,5; f(1,5))$

Exercice 4

5 points

1. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 2x) = 0 \\ \text{Par croissance comparée } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = 0$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0}$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2\ln(x) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{x} \right) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2\ln(x) \right] = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2\ln(x) \right] = -\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{par produit}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2\ln(x) \right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$f'(x) = 5 \times 2x + 2 - 2 \left[2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right] = 10x + 2 - 2[2x \ln(x) + x] = 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x$$

$$= \boxed{8x + 2 - 4x \ln(x)}$$

3. a.

$$f''(x) = 8 - 4 \left[1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right] = 8 - 4 \ln(x) - 4 = 4 - 4 \ln(x) = \boxed{4[1 - \ln(x)]}$$

b. La courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$$f''(x) \geq 0 \iff 4[1 - \ln(x)] \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[).$$

La courbe \mathcal{C}_f est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0; e]$.

c.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	0	-
Variations de f'	2	4e + 2	$-\infty$

$$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e) = 8e + 2 - 4e = 4e + 2$$

4. a. Sur $]0; e]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in]0; e]$, on a $f'(x) > 0$.

Sur $[e; +\infty[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f'(e) = 4e + 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in]-\infty; 4e + 2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e; +\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.

On a :

$$\boxed{7,87 < \alpha < 7,88}$$

b. On sait que sur $]0; e]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[e; +\infty[$ et qu'elle s'annule en α , $f'(x) \geq 0$ sur $[e; \alpha]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0; \alpha]$ et négatif sur $[\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f			

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0 \\
 &\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha + 1)}{4\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \\
 &\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha) \\
 &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} \\
 &= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) \\
 &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha \\
 &= \boxed{\alpha^2 + \alpha}
 \end{aligned}$$

6. D'après la question 4.a., on a :

$$\begin{aligned}
 7,87 < \alpha < 7,88 &\iff 61,936\ 9 < \alpha^2 < 62,094\ 4 \\
 &\iff 69,806\ 9 < \alpha^2 + \alpha < 69,974\ 4 \\
 &\iff \boxed{69,806\ 9 < f(\alpha) < 69,974\ 4}
 \end{aligned}$$