

Exercice 1 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2}$

On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) Déterminer les limites de f en 2 (à droite et à gauche).
Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
- 3) Etudier les variations de f .
- 4) On appelle Δ la droite d'équation $y = -2x + 3$

Etudier les positions relatives de \mathcal{C} et de Δ .

Exercice 2 (4 points)

Calculer les limites en justifiant.

a) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{3x + 2}{2x - 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{1000}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{(-2x + 4)^3}$

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 8]$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2; 8]$, on a : $f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2; 8]$.
 - c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 8]$
2. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2; 8]$.
 - a) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2; 8]$, on a : $f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$.
 - b) Etudier la convexité de f sur $[2; 8]$.
 - c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

démontrer que la courbe \mathcal{C}_f possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0.36$ puis donner un encadrement à 10^{-3} de toutes les solutions.

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$:

$$f''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

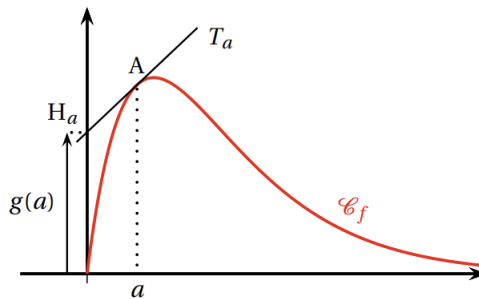
6. Soit a un réel appartenant à $[0; +\infty[$ et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a .

On note T_a la tangente à \mathcal{C}_f en A .

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



- a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2 e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de $g(a)$.

- c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice bonus

La courbe C ci-contre représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

- 1)
 - a. Déterminer par lecture graphique $f(0)$.
 - b. Déterminer par lecture graphique $f'(0)$.
 - c. Pensez-vous que cette fonction semble convexe sur $[0;6]$?
- 2)
 - a. Exprimer la fonction dérivée f' en fonction de a et b .
 - b. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b .
 - c. Calculer alors f'' .
 - d. Indiquer alors sur quel intervalle de \mathbb{R} f est convexe et celui sur lequel elle est concave. Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.

