Exercice 1

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x^2+7x-8) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites on obtient $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

On en déduit, que graphiquement, il y a une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Elle est du type $\dfrac{u}{v}$

$u'(x) = -4x+7 \qquad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(-4x+7)(x-2) - (-2x^2+7x-8)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+8x-6}{(x-2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $-2x^2+8x-6$

$\Delta = 64 - 4(-2)(-6) = 16 > 0$

$x_1 = \dfrac{-8-4}{-4} = 3 \qquad x_2 = \dfrac{-8+4}{-4} = 1$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$ ||	↗	-5	↘	

$f(1) = 3$

$f(3) = -5$

4) Pour étudier les positions relatives, on étudie le signe de la différence.

$$d(x) = f(x) - \Delta(x) = \frac{-2x^2+7x-8}{x-2} - (-2x+3)$$

$$= \frac{-2x^2+7x-8+(2x-3)(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{-2}{x-2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-\Delta(x)$		$+$	||	$-$	

Sur $]-\infty ; 2[$ $\quad f(x) - \Delta(x) > 0 \iff f(x) > \Delta(x) \iff \mathcal{C}$ est au-dessus de Δ

Sur $]2 ; +\infty[$ $\quad f(x) - \Delta(x) < 0 \iff f(x) < \Delta(x) \iff \Delta$ est au-dessus de $\mathcal{C}$

Exercice 2

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (3x+2) = 17 \\ \lim\limits_{x \to 5^-} (2x-10) = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{3x+2}{2x-10} = -\infty$

b) $$\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$ pour tout $x > 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+ \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = 0^+$

c) Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (croissances comparées)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{1000}} = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} e^x = e^2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (-2x+4) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} (-2x+4)^3 = 0^+$

Par quotient de limites $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{e^x}{(-2x+4)^3} = +\infty$

Exercice 3

1) a) $$f'(x) = \frac{(-2x+10)x^2 - (-x^2+10x-16)2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}$$

b) Sur $[2;8]$ $x^3 > 0$

$-10x + 32 \geqslant 0 \iff 32 \geqslant 10x \iff x \leqslant 3,2$

c)

x	2		$3,2$		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(3,2)$	$\searrow$	0

$f(3,2) = 0,5625$

2 a) $$f''(x) = \frac{-10x^3 - (-10x+32)\times 3x^2}{(x^3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-10x^3 + 30x^3 - 96x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{20x^3 - 96x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

b) $\forall x \in [2;8]$ $x^4 > 0$ le signe de $f''(x)$ dépend de $20x - 96$

$20x - 96 \geq 0 \iff 20x \geq 96 \iff x \geq 4{,}8$

x	2		4,8		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

c) La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = 4{,}8$

la courbe possède un point d'inflexion de coordonnées

$$\left(4{,}8 \; ; \; \frac{7}{18}\right)$$

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$; c'est l'axe des abscisses.
2. Pour tout réel x appartenant à $[0~;~+\infty[$: $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

   On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$f(0) = 0$; $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On dresse le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4. $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}369 > \frac{367}{1000}$

- Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction f est continue et strictement croissante ; elle va de 0 à $\mathrm{e}^{-1} > 0{,}367$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}367$ admet une solution unique sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle va de $\mathrm{e}^{-1} > 0{,}367$ à 0. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}367$ admet une solution unique sur cet intervalle.

L'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet donc deux solutions sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

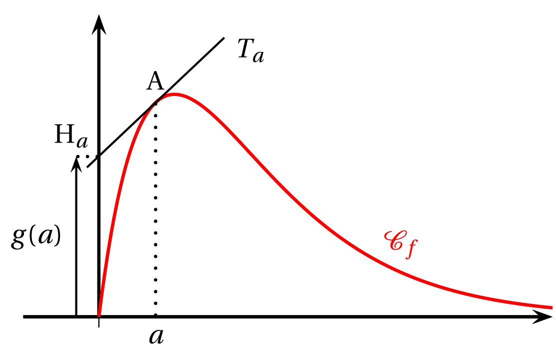
5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$: $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
		f est concave		f est convexe	

On peut même préciser que la courbe admet le point d'abscisse 2 comme point d'inflexion.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. La tangente T_a a pour équation :

$$\begin{aligned} y = f'(a)(x-a) + f(a) &\iff y = (1-a)\,\mathrm{e}^{-a}(x-a) + a\,\mathrm{e}^{-a} \\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x - (1-a)\,\mathrm{e}^{-a}a + a\,\mathrm{e}^{-a} \\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x - a\,\mathrm{e}^{-a} + a^2\,\mathrm{e}^{-a} + a\,\mathrm{e}^{-a} \\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x + a^2\,\mathrm{e}^{-a} \end{aligned}$$

b. $g(a)$ est l'ordonnée du point H_a de la tangente d'abscisse 0 ; donc
$g(a) = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}] \times 0 + a^2\,\mathrm{e}^{-a} = a^2\,\mathrm{e}^{-a}$.

c. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
$g'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -x(x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$

x	0		2		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes de $g'(x)$, la fonction g est croissante puis décroissante ; elle admet un maximum pour $x = 2$, ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.