Exercice 1 (6 points)

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite si elle existe. Justifier.

$U_n = \dfrac{2n^3 + n - 1}{5n^2 + 1}$

$X_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$V_n = \dfrac{3^n - 5^n}{3^n}$

$Y_n = 1.01^n(2 - n)$ pour tout n entier naturel

$W_n = \dfrac{\sqrt{n} + 1}{n - 1}$

$Z_n = \dfrac{3 - u_n}{u_n - 2}$ où $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$

Exercice 2 (6 points)

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
   c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
   D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Exercice 3 (4 points)

Donner, si elle existe, la limite des suites.

a) (W_n) est une suite arithmétique de premier terme $W_0 = -2$ et de raison $r = 0.05$.

b) $X_n = 1 - 0.8 + 0.8^2 - 0.8^3 + ... + (-0.8)^n$

c) $Y_n = 1 + \dfrac{5}{4} + \dfrac{25}{16} + ... + \dfrac{5^n}{4^n}$

c) $Z_n = 0.9^2 + 0.9^3 + 0.9^4 + ... + 0.9^n$ pour tout $n \geq 2$

Exercice 4 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$

1) Calculer u_1,u_2,u_3 et u_4. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

3) Démontrer que pour tout entier n
$u_n \leq n + 3$

4) Démontrer que pour tout entier n
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

5) En déduire une validation de la conjecture (question2).

Exercice 5 (Bonus)

On étudie l'évolution de deux ruches A et B.
Chaque mois, 20% des abeilles de A passent en B et 20% des abeilles de B passent en A.
Au bout de n mois, on note a_n la population en milliers d'abeilles de la ruche A et b_n celle de la ruche B.
Au début de l'expérience,la ruche A compte 60000 abeilles et la ruche B en compte 20000.
Ainsi $a_0 = 60$ et $b_0 = 20$.

1) Vérifier, que pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.8a_n + 0.2b_n \\ b_{n+1} = 0.2a_n + 0.8b_n \end{cases}$$

2) Calculer les 5 premiers termes de chaque suite.

3) Démontrer que l'on a : $a_n + b_n = 80$

4) Démontrer que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = a_n - b_n$ est géométrique.

5) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

6) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?
Quelle est la limite de la suite (b_n) ?
Interpréter.