Exercice 1

* $$\frac{2n^3\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)}{5n^2\left(1+\frac{1}{5n^2}\right)} = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)}{5\left(1+\frac{1}{5n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{5n^2}\right)} = 1$$

Par produit de limites on obtient $\lim U_n = +\infty$

* $V_n = \frac{3^n}{3^n} - \frac{5^n}{3^n}$

$V_n = 1 - \left(\frac{5}{3}\right)^n$

$\lim \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ du type q^n avec $q>1$

donc $\lim -\left(\frac{5}{3}\right)^n = -\infty$ par suite $\lim V_n = -\infty$

* Factorisons par $\sqrt{n}$

$$W_n = \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim \left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0^+$$

* $X_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

$$\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

Par le théorème d'encadrement dit "des gendarmes"

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = 0$

* $\lim 1{,}01^n = +\infty$ car du type q^n avec $q > 1$

$\lim (2-n) = -\infty$

Par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n = -\infty$

* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2^-$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 3 - u_n = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 2 = 0^- \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites, on obtient

$\lim\limits_{n \to +\infty} Z_n = -\infty$

Exercice 2

1) $u_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times 1 + 0,25 = 1,15$ mg au bout de 30 min

2) pour tout entier n

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times u_n + 0,25$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,9\, u_n + 0,25$$

suite arithmético-géométrique

l'organisme élimine 10%, il reste donc 90%

3) a) A. Initialisation

$1 \leq 1,15 < 5$ donc $u_0 \leq u_1 < 5$

la propriété est vraie si $n = 0$.

B Hérédité

Supposons qu'il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que $u_K \leq u_{K+1} < 5$

0,9 est un nombre positif, on obtient donc : $0,9\, u_K \leq u_{K+1} \times 0,9 < 0,9 \times 5$

puis en ajoutant 0,25 $\quad \underbrace{0,9\, u_K + 0,25} \leq 0,9 u_{K+1} + 0,25 < 4,75$

$$u_{K+1} \leq u_{K+2} < 4,75 < 5$$

L'hérédité est démontrée

C- Conclusion

On a montré que pour tout entier n on a :

$$u_n \leq u_{n+1} < 5$$

b) On a montré dans la question précédente que la suite (u_n) est croissante et majorée (par 5) donc elle converge

4 a)

```
while u < 1,8 :
    u = 0,9u + 0,25
    n = n+1
```

b) Ce script renvoie la valeur $n = 8$
Le médicament devient efficace au bout de 4h. ($8 \times 0{,}5h = 4h$)

5 a) $v_{n+1} = 2{,}5 - u_{n+1}$

$v_{n+1} = 2{,}5 - (0{,}9u_n + 0{,}25)$

$v_{n+1} = 2{,}5 - 0{,}9\,(2{,}5 - v_n) - 0{,}25$

$v_{n+1} = 0{,}9\,v_n + 2{,}5 - 2{,}25 - 0{,}25$

$v_{n+1} = 0{,}9\,v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0{,}9$
et de premier terme $v_0 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$ ← formule explicite

b) $\left.\begin{array}{l} v_n = 2{,}5 - u_n \\ v_n = 1{,}5 \times 0{,}9^n \end{array}\right\}$ $2{,}5 - u_n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$

$\iff \boxed{u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n}$

c) $\lim 0{,}9^n = 0$ car du type q^n avec $0 < q < 1$
donc $\lim -1{,}5 \times 0{,}9^n = 0$

par suite, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2{,}5$

le traitement n'est pas risqué puisque on ne dépasse jamais 2,5 mg, ce qui est inférieur au seuil de toxicité de 3 mg.

Exercice 3

a) $W_n = -2 + 0{,}05n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}05n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$

b) $X_n = 1 + (-0{,}8) + (-0{,}8)^2 + \dots + (-0{,}8)^n$

$$X_n = \frac{1 - (-0{,}8)^{n+1}}{1 - (-0{,}8)}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}8)^{n+1} = 0$ car du type q^n avec $-1 < q < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 - (-0{,}8)^{n+1}\right] = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \frac{1}{1{,}8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

c) $$Y_n = \frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{5}{4}\right)}$$

$\lim \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} = +\infty$ donc $\lim \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right] = -\infty$

$1 - \frac{5}{4} < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n = +\infty$

d) $1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \dots + 0{,}9^n = \dfrac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9}$

$\Leftrightarrow \quad Z_n = \dfrac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9} - 1 - 0{,}9$

$\lim 0{,}9^{n+1} = 0$ donc $\lim Z_n = \dfrac{1}{0{,}1} - 1 - 0{,}9 = 8{,}1$

Exercice 4

6/6

1) $u_0 = 2$ $\quad u_1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$ $\quad u_2 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$ $\quad u_3 = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$ $\quad u_4 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$ 1

) D'aprè les premiers termes, la suite est croissante 0,5

) Par récurrence

A_ Initialisation :

$\left.\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ 0+3 = 3 \end{array}\right\}$ $u_0 \leq 0+3$ c'est vrai quand $n = 0$

B_ Hérédité : Supposons qu'il existe un nombre entier K tel que $u_K \leq K+3$ 1

$u_K \leq K+3$

$\frac{2}{3} u_K \leq \frac{2}{3}(K+3)$

$\frac{2}{3} u_K + \frac{1}{3} K \leq \frac{2}{3} K + 2 + \frac{1}{3} K$

$\underbrace{\frac{2}{3} u_K + \frac{1}{3} K + 1}_{= u_{K+1}} \leq K+3 \leq K+4$

l'hérédité est montrée

C_ Conclusion

Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_n \leq n+3$

4) $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1\right) - u_n$

$= -\frac{1}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$ 0,5

$= \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$

5) $u_n \leq n+3$ donc $-u_n \geq -(n+3)$ 1

Par suite $-u_n + n + 3 \geq -(n+3) + n + 3$ puis $\frac{1}{3}(-u_n + n + 3) \geq 0$

on obtient $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n$ 1

On a donc montré que (u_n) est croissante