Exercice 1 (2 points)

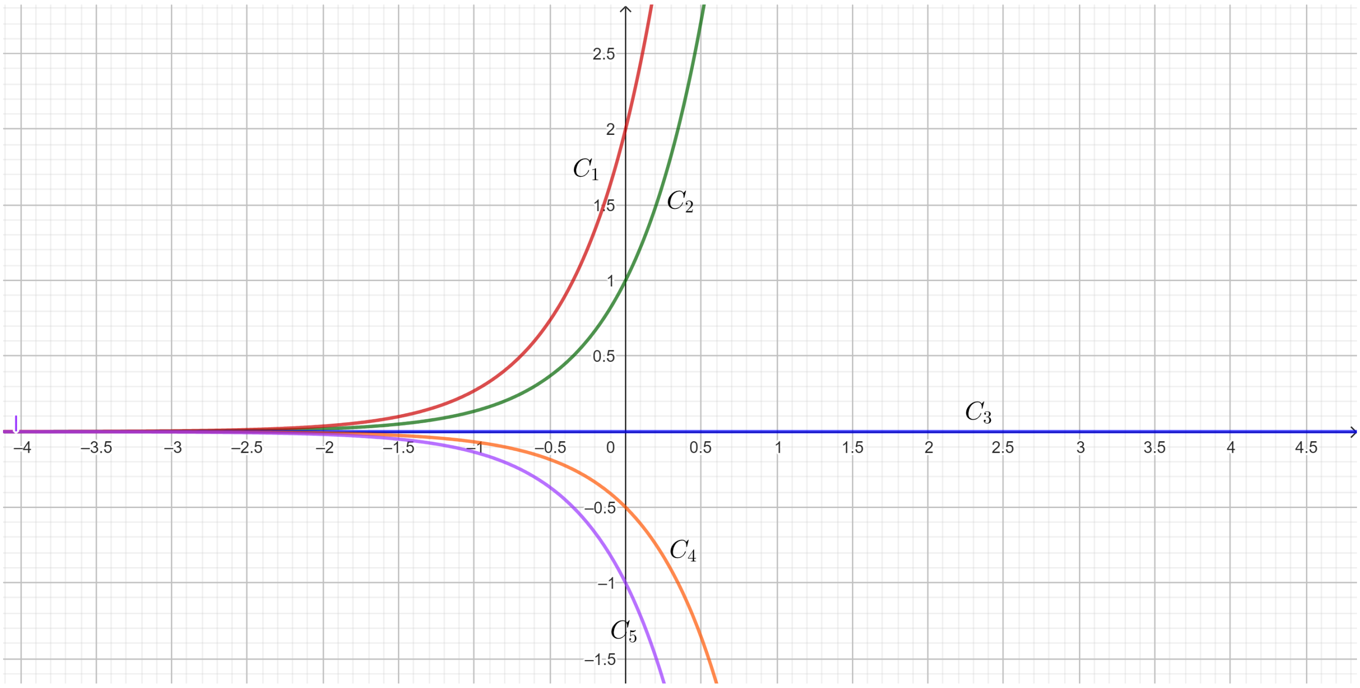
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1) $y' - \frac{1}{2}y = 0$

2) $y' = 5y + 1$

Exercice 2 (3 points)

Dans un repère du plan, on a tracé les représentations graphiques de cinq solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$



Donner l'expression des fonctions f_1,f_2,f_3,f_4 et f_5

Exercice 3 (4 points)

1) Déterminer une fonction polynôme du second degré ϕ solution particulière de l'équation

différentielle $(E) : y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$

2) Déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = 4$

Exercice 4 (6 points)

$A = \int_0^2 (t^3 + t)\,\mathrm{d}t$

$B = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$

$C = \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (méthode intg par parties)

$D = \int_2^9 \left(\frac{1}{3\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t$

$E = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3t)\,\mathrm{d}t$

$F = \int_1^2 \frac{dt}{(3t+1)^3}$

Exercice 5 (5 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$

1) Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
from math import*
n=int(input("donner une valeur à n="))
u=
for i in range(1,n+1):
  u=
print(u)
```

b) A l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	$0,693\,1$	$0,306\,9$	$0,193\,1$	$0,140\,2$	$0,109\,8$	$0,090\,2$	$0,047\,5$	$0,009\,9$	$0,005\,0$

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice bonus

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x-1)e^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

3) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.