

### Exercice 1

$$1) \quad y' = \frac{1}{2} y$$

$$S = \left\{ f(x) = k e^{0,5x} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$2) \quad y' = 5y + 1$$

$x \rightarrow -\frac{1}{5}$  solution constante

$$S = \left\{ f(x) = k e^x - \frac{1}{5} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

### Exercice 2

les solutions de  $y' = 2y$  sont les fonctions  $x \rightarrow C e^{2x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

$$f_1(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 e^0 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2 \quad \text{donc } f_1(x) = 2e^{2x}$$

$$f_2(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 \quad \text{donc } f_2(x) = e^{2x}$$

$$f_3(0) = 0 \Leftrightarrow C_3 = 0 \quad \text{donc } f_3(x) = 0$$

$$f_4(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow C_4 = -\frac{1}{2} \quad \text{donc } f_4(x) = -\frac{1}{2} e^{2x}$$

$$f_5(0) = -1 \Leftrightarrow C_5 = -1 \quad \text{donc } f_5(x) = -e^{2x}$$

### Exercice 3

soit  $f$  solution de (E) avec  $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$   
 $\phi'(x) = 2\alpha x + \beta$

$$\phi'(x) + 2\phi(x) = 2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + 2\gamma + \beta$$

Par identification des coefficients on obtient

$$\begin{cases} 2\alpha = 4 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \\ 2\gamma + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } \phi(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

2) Les solutions de (E) :  $y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$

sont les fonctions  $f(x) = Ce^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2$  avec  $C \in \mathbb{R}$   
Parmi celles-ci on a  $F(0) = 4$

$$F(0) = 4 \Leftrightarrow C + 2 = 4 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\boxed{F(x) = 2e^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2}$$

Exercice 4

$$A = \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = \frac{16}{4} + \frac{4}{2} = 6$$

$$B = \left[ -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} \right]_1^2 = \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{7}{8}$$

$$D = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{t} \right]_{t=2}^{t=9} = \frac{2}{3} (3 - \sqrt{2}) = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3}$$

$$E = \left[ -\frac{1}{3} \cos(3t) \right]_{\pi/12}^{\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$F = \int_1^2 \frac{1}{3} \underbrace{3}_{u'} \underbrace{(3t+1)^{-3}}_{u^n} dt = \left[ \frac{1}{3} \frac{1}{(-2)(3t+1)^2} \right]_{t=1}^{t=2} = -\frac{1}{6} \left( \frac{1}{49} - \frac{1}{16} \right) = \frac{11}{1568}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx &= \left[ -(x+3)e^{-x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -e^{-x} dx \\ &= \left[ -(x+3)e^{-x} \right]_{-1}^1 - \left[ e^{-x} \right]_{-1}^1 \\ &= \left[ (-x-4)e^{-x} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{5}{e} - (-3e) \\ &= \frac{3e^2 - 5}{e} \end{aligned}$$

# Liban 2015. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 : corrigé

1)  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$

$u_0 = \ln(2).$

2) a) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ .

b)  $u_1 = \frac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln(2).$

$u_1 = 1 - \ln(2).$

3) a) **Algorithme complété.**

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Saisir $n$
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur $\ln(2)$
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à $n$  Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{i} - u$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher $u$

b) Il semble que la suite  $(u_n)$  soit décroissante, convergente, de limite nulle.

4) a) Soit  $n$  un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $x^n \geq 0$ ,  $x-1 \leq 0$  et  $1+x > 0$ . Donc, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$ . Par croissance de l'intégrale,  $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$  ou encore  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ou encore  $u_{n+1} \leq u_n$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

b) Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$ . Par positivité de l'intégrale,  $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0$  ou encore  $u_n \geq 0$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel positif ou nul.

5) Soit  $n$  un entier naturel. Puisque  $u_{n+1} \geq 0$ ,

$$0 \leq u_n \leq u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .