Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

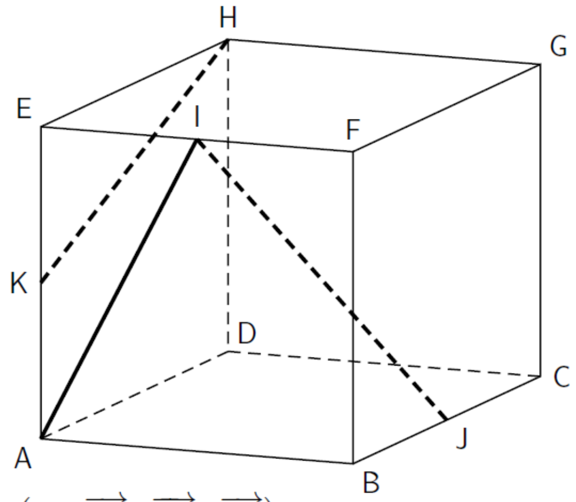
Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 6 pts Ex2 : 5 pts Ex3 : 4 pts Ex4 : 5 pts

Exercice 1 (6 points)

Partie A

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner, sans les justifier les coordonnées des points A, I, K et H.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$.

3. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. a. Déterminer $||\overrightarrow{AI}||$ et $||\overrightarrow{KH}||$.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KH}$.

c. En déduire, au degré, la valeur de l'angle $\left(\ \overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{KH}\ \right)$

Partie B

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t \\ y &=& 8-2t \\ z &=& -2+3t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 8+2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

a. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

b. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

c. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathcal{P}$.

d. Quelle est la distance du point L au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,065 3.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

Partie B

1. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise et donc des tirages indépendants et identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes. On rappel que la probabilité qu'un test soit positif est de 0,065 3.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice, nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Partie C

On considère l'algorithme ci-dessous écrit en Python :

Langage Python

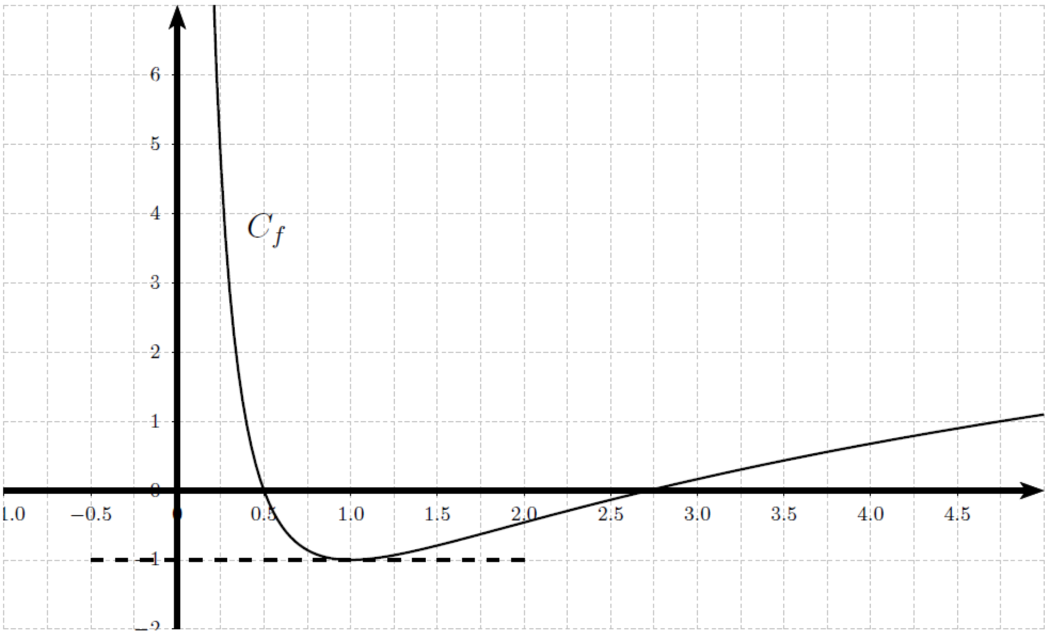
```
from random import *
succes = 0
for n in range(100) :
        if random() ⩽ 0.0653 :
                succes = succes + 1
print(succes)
```

On exécute cet algorithme un très grand nombre de fois. Quelle est valeur moyenne de la variable "succes" ?

Exercice 3 (4 points)

Partie I : Étude graphique d'une fonction auxiliaire

On a représenté la courbe représentative d'une fonction f sur le graphique ci-dessous.
On admet que f est croissante sur $[\ 1\ ;\ +\infty\ [$.
La courbe de C_f admet une tangente horizontale pour $x = 1$.



1. Déterminer $f'(1)$.
2. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Donner les solutions à 10^{-1} près.
3. Déterminer le signe de sa fonction dérivée f'.

Partie II : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. En utilisant la partie II, dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$
3. Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4 (5 points)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

1. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

c. Quelle est la limite de la suite u_n ? Justifier votre réponse.

d. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de n telle que $u_n \geqslant 50$.