Spécialité Mathématiques-Corrigé BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 6 pts   Ex2 : 5 pts   Ex3 : 4 pts   Ex4 : 5 pts

Exercice 1 (6 points)

Partie A

1. Les coordonnées des points sont : A(0 ;0 ;0), I(0,5 ;0 ;1), K(0 ;0 ;0,5) et H(0 ;1 ;1).
2. Les coordonnées des vecteurs sont : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\0,5\end{pmatrix}$
3. Les droites (AI) et (KH) sont parallèles si les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ sont colinéaires. Comme il n'existe pas de réel k tel que $0,5\times k=0$ et $1\times k=0,5$ alors . Comme les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires alors les droites ne sont pas parallèles.
4. **a.** $||\overrightarrow{AI}||=\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}=\sqrt{1,25}$ et $||\overrightarrow{KH}||=\sqrt{0^2+1^2+0,5^2}=\sqrt{1,25}$.

   b. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{KH}=0,5\times 0+0\times 1\times 0,5=0,5$.

   c. On a $\cos\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{KH}\right)=\dfrac{0,5}{\sqrt{1,25}\times\sqrt{1,25}}$. À l'aide la la calculatrice $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{KH}\right)\approx 66°$.

Partie B

1.

   a. Un vecteur directeur de la droite d_1 est $\overrightarrow{d_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite d_2 est $\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

   Comme $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-2}{1}$ alors les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

   b. un vecteur directeur de la droite d_2 est $\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$. On calcul le produit scalaire $\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{n}=1\times 1+1\times 3+2\times(-2)=0$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux alors la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

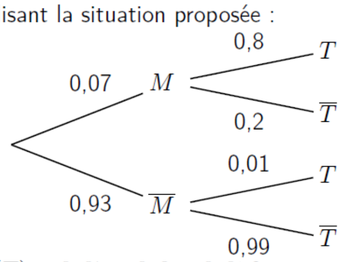
   c. Il faut montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) appartient au plan $\mathcal{P}$: $4+0\times 3-2\times 3+2=0$. Donc L appartient au plan $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$. Donc comme les vecteurs sont égaux alors L est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$ puisque la droite (LM) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

   d. Comme le point L appartient au plan $\mathcal{P}$, la distance de L au plan $\mathcal{P}$ est 0.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,07\times 0,8=0,056$.

   b. On a de même $P\left(\overline{M}\cap T\right)=P\left(\overline{M}\right)\times P_{\overline{M}}(T)=0,93\times 0,01=0{,}009\,3$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $P(T)=P(M\cap T)+P\left(\overline{M}\cap T\right)=0,056+0{,}009\,3=0{,}065\,3$.
3. On calcule $P_T(M)=\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,056}{0{,}065\,3}\approx 0{,}857\,58$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0{,}065\,3$ car les événements sont identiques, indépendants, successifs et ont deux issues possibles.

   b. On a $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0{,}065\,3^2 \times (1-0{,}065\,3)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0{,}065\,3^2 \times 0,9347^8 =$ $45 \times 0{,}065\,3^2 \times 0,9347^8 \approx 0{,}111\,8$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.

2. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}065\,3^0 \times (1-0{,}065\,3)^n = 1 - 0{,}934\,7^n$ et on veut que :

   $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0{,}934\,7^n > 0,99 \iff 0,01 > 0{,}934\,7^n$ soit en prenant le logarithme népérien :

   $\ln 0,01 > n \ln 0{,}934\,7 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0{,}934\,7} < n.$

   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0{,}934\,7} \approx 68,2.$

   Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

Partie C

Cet algorithme permet simuler une loi binomiale $\mathcal{B}(\ 100\ ;\ 0{,}065\,3\ )$.
Comme on exécute cet algorithme un très grand nombre de fois, la valeur calculée est l'espérance donc :
$E(X) = 100 \times\ \ 0{,}065\,3\ \ = 6,53.$

Exercice 3 (4 points)

Partie I : Étude graphique d'une fonction auxiliaire

1. Comme la tangente est horizontale alors $f'(x) = 0$.
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 0,5$ et $x = 2,7$.
3. On a le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie II : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et 0.

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0} 2x-2 = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = -\infty$$

2. La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. On a $g(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 2 = 0$.
   On établit le tableau de signe de la fonction g :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0~;~+\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :
   $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \dfrac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   b. Sur $]0~;~+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.
   $f(1) = \left(2 - \dfrac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$
   On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	-1	↗	

2. $f(x) = 0 \iff \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 02 - \dfrac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$
   $2 = \dfrac{1}{x}$ ou $\ln(x) = 1x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = e$
   L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0~;~+\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = e$.
   On complète le tableau de variations de f en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4 (5 points)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

Partie A

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.
   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

Partie B

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

1. **a.** La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
   = 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

   b. La suite (u_n) semble croissante.

2. **a.** Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).
  $$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$
  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc
  $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

c. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

d.

```
Langage Python
U = 1
N = 0
while U < 50 :
    U = 3/4*U + 1/4*N +1
    N = N + 1
print(N)
```

e. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $n = 50$.