Exercice 1

1c 2a 3c 4b 5c

Exercice 2

1) $F(0;0;0)$ $I(1;0;0)$ $X(1;1;0)$ $A(0;1;0)$

$B(0;0;1)$ $L(1;0;1)$ $E(1;1;1)$ $S(0;1;1)$

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{SI}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

3) On peut remarquer que les points B, A, E forment un plan car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ ne sont pas colinéaires

0	-1	1
1	0	1

$0\times 1 \neq -1\times 1$

$\vec{AB}\cdot\vec{SI} = (0)(1)+(-1)(-1)+(1)(-1) = 1-1 = 0$ donc $\vec{AB}\perp\vec{SI}$

$\vec{AE}\cdot\vec{SI} = (1)(1)+(0)(-1)+(1)(-1) = 1-1 = 0$ donc $\vec{AE}\perp\vec{SI}$

$\vec{SI}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABE) donc la droite (SI) est orthogonale au plan (BAE).

4) $M(X;Y;Z)\in(BAE) \iff \vec{AM}\perp\vec{SI}$

$\iff \vec{AM}\cdot\vec{SI}=0$

$\iff X-(Y-1)-Z=0$

$\iff X-Y-Z+1=0$

(on peut vérifier rapidement que les points A, B, E appartiennent au plan)

5) $\begin{cases} x(\alpha)=\alpha \\ y(\alpha)=1-\alpha \\ z(\alpha)=1-\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$

$\vec{SI}$ est un vecteur directeur de la droite (SI) et S en est un point.

6) Puisque la droite (SI) est orthogonale au plan (BAE), le projeté orthogonal du point I sur le plan (BAE) est en fait l'intersection de la droite (SI) et du plan (BAE).
Nommons $J(x_J ; y_J ; z_J)$ ce point

$$J = (SI) \cap (BAE) \iff \begin{cases} x_J = \alpha \\ y_J = 1-\alpha \\ z_J = 1-\alpha \\ x_J - y_J - z_J + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_J = \alpha \\ y_J = 1-\alpha \\ z_J = 1-\alpha \\ \alpha - (1-\alpha) - (1-\alpha) + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_J = \frac{1}{3} \\ y_J = \frac{2}{3} \\ z_J = \frac{2}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$J\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$$

Exercice 3

$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de (d_1) et (d_2)

1)
$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$1 \times 1 \neq (-1)(-2)$
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

2) $M(x;y;z) \in (d_1) \cap (d_2) \iff \begin{cases} 1+2t = -7+u \\ 3-t = 4+u \\ -2+t = -1-2u \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 2t - u = -8 \\ -t - u = 1 \end{array}} \\ -2 + t = -1 - 2u \end{cases}$$

on résout ce système de 2 équations à 2 inconnues en multipliant la ligne 2 par (-1) puis en additionnant les lignes 1 et 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ t = -3 \\ -2 + t = -1 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

c'est vrai

Ce système a une unique solution $(u ; t) = (2 ; -3)$

Conclusion : les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes au point $K(-5 ; 6 ; -5)$

on remplace u par 2 dans les équations paramétriques de (d_1) ou bien par $t = -3$ dans les équations de (d_1)

Exercice 4

a.

Solution : P(2 ; 0 ; 0) , Q(0 ; 0 ; 2) et Ω(3 ; 3 ; 3)

b.

Solution : R(0 ; 4 ; 6) donc $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{QR}=0\end{cases} \iff \begin{cases}-2+4b+6c=0\\ 4b+4c=0\end{cases} \iff \begin{cases}2b=-2\\ c=-b\end{cases} \iff \begin{cases}b=-1\\ c=1\end{cases}$

Finalement $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR)

c.

Solution :
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) : $x-y+z+d=0$.
Or P(2 ; 0 ; 0) ∈ (PQR) donc $x_P-y_P+z_P+d=0$.
Finalement (PQR) : $x-y+z-2=0$.

a.

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc $\overrightarrow{n}$ est directeur de Δ, de plus Ω(3 ; 3 ; 3) ∈ Δ.

On en déduit : Δ : $\begin{cases}x=3+t\\ y=3-t\\ z=3+t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$.

b.

Solution : Si on pose $t=-\dfrac{1}{3}$ dans la représentation précédente on obtient les coordonnées de I donc I ∈ Δ.
De plus $x_I-y_I+z_I-2=\dfrac{8}{3}-\dfrac{10}{3}+\dfrac{8}{3}-2=0$ donc I ∈ (PQR).
Finalement Δ coupe le plan (PQR) au point I $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

c.

Solution :
$\Omega I=\sqrt{(x_I-x_\Omega)^2+(y_I-y_\Omega)^2+(z_I-z_\Omega)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

a.

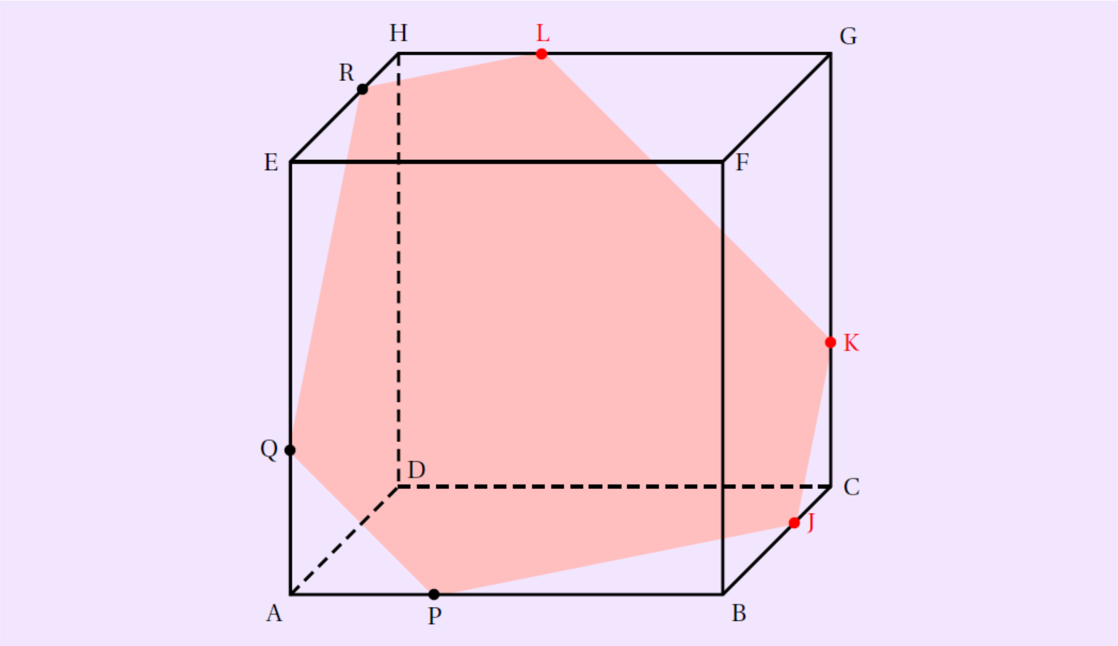
Solution : $x_J-y_J+z_J-2=6-4-2=0$ donc J ∈ (PQR).

b.

Solution :
$\overrightarrow{JK}\,(0\,;\,2\,;\,2)$ or $\overrightarrow{QR}\,(0\,;\,4\,;\,4)$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que (JK) et (QR) sont parallèles.

c.

Solution : J et K sont respectivement sur les arêtes [BC] et [CG] du cube
On place J et K aisément en remarquant que $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CG}$
J ∈ (PQR) et (JK) est parallèle à (QR) donc (JK) ⊂ (PQR).
(PQR) coupe la plan (ABE) suivant la droite (QP)
donc (PQR) coupe le plan (CDG) suivant une parallèle à (QP) passant par K.
Soit L le point d'intersection entre cette droite et l'arête [GH].
La section du cube par le plan (PQR) est l'hexagone JKLRQP


H
L
G
R
E
F
K
Q
D
C
J
A
P
B