

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x=e$.
 - c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la tangente T .
2.
 - a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$. On note α cette solution.
 - b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3; 4,4[$.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien \ln .

```
def seuil(pas) :  
    x=4.3  
    while x*log (x) - x - 2 < 0:  
        x=x+pas  
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f .
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} . On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f .

Exercice 4 (4 points)

- 1) Résoudre l'équation suivante

$$\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$$

- 2) Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = 7 \\ 3 \ln x - 5 \ln y = 4 \end{cases}$$

Exercice 5 (bonus)

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.