Exercice 1

1 d   2c   3c   4 d   5 c

Exercice 2

1 a) $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$

$f'(x) = \ln x + 1 - 1$

$f'(x) = \ln x$

b) Tangente en e

$y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$y = \ln(e)(x-e) + e\ln(e) - e - 2$

$y = x - e + e - e - 2$

$y = x - e - 2$

c) Calcul de la dérivée seconde sur $]0;+\infty[$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $1>0$ et $x>0$ donc $\frac{1}{x}>0$

$f''(x)>0$ donc f est convexe sur $]0;+\infty[$

d) f est convexe donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes les tangentes sur $]0;+\infty[$

donc, en particulier, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T.

2 a) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ (d'après le cours, croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$

b) $f(x) = x\left(\ln x - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - 1 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ -2	↘	-3	↗	$+\infty$

$\ln x \leqslant 0 \iff x \in]0;1]$

$\ln x \geqslant 0 \iff x \in [0;+\infty[$

$f(1) = 1\ln(1) - 1 - 2$

à ce stade, on utilise la calculatrice pour vérifier les résultats obtenus

4 a) sur $]0;1]$, l'équation n'a pas de solution car $0 \notin [-3;-2[$

sur $]1;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $0 \in]-3;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $]1;+\infty[$

Donc, il y a une seule solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b) Grâce à la calculatrice, par balayages successifs, on obtient :

$f(4) < 0$ et $f(5) > 0 \Rightarrow 4 < \alpha < 5$

$f(4{,}3) < 0$ et $f(4{,}4) > 0 \Rightarrow 4{,}3 < \alpha < 4{,}4$

4c Grâce au tableau de variations, on obtient

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

en dessous de l'axe des abscisses

au-dessus de l'axe des abscisses

5. La valeur renvoyée est 4,32 donc $f(4{,}31)<0$ et $f(4{,}32)>0$

on a donc $4{,}31 < \alpha < 4{,}32$

Exercice 4

1) Ensemble de définition

$$\begin{cases} x+4>0 \\ \text{et } x+1>0 \\ \text{et } x+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \text{et } x>-9 \\ \text{et } x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1$$

$$D_f =]-1\,;+\infty[$$

$$\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$$

$$\ln\left[(x+4)(x+1)\right] = \ln(x+9)$$

$$\ln(x^2+5x+4) = \ln(x+9)$$

$$x^2+5x+4 = x+9$$

$$x^2+4x-5 = 0$$

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$\underset{\in D_f}{x=1} \quad \text{ou} \quad \underset{\notin D_f}{x=-5}$$

Finalement $S=\{1\}$

2) Changement de variables $X = \ln x \quad Y = \ln y$

$$\begin{cases} 2X + Y = 7 \\ 3X - 5Y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 10X + 5Y = 35 \\ 3X - 5Y = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 13X = 39 \\ 3X - 5Y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \qquad S = \{(3;1)\}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x = 3 \\ \ln y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e^3 \\ y = e \end{cases}$$

Finalement on a : $S = \{(e^3 ; e)\}$

Exercice 3

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$

1) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{z \to +\infty} \ln(z) = +\infty \end{array}\right\}$$ Par composition de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = +\infty$

0,5

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{z \to +\infty} \ln(z) = +\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = +\infty$$

2) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$ 0,5

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 2{,}5 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur $(2x+1)$

$$2x + 1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(9/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0{,}81$$

4 a) * Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $2 \in \left[\ln\left(\frac{9}{4}\right); +\infty\right[$
D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1

* De même, il y a une unique solution dans l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

b) Par balayages successifs, on obtient (calculatrice)

$$1 < \alpha < 2$$
$$1{,}7 < \alpha < 1{,}8 \qquad \alpha \approx 1{,}8$$
$$1{,}76 < \alpha < 1{,}77$$

5) Etudions le signe de $f''(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + x + 2{,}5)^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ dépend du numérateur $-2x^2 - 2x + 4 = -2(x^2 + x - 2) = -2(x-1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave		convexe		concave	

Il y a deux points d'inflexion $A(-2; f(-2))$ et $B(1; f(1))$

<u>Exercice 5 (bonus)</u>

1) $f_k(x) = kx - x\ln x$

$f'_k(x) = k - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$

$f'_k(x) = -\ln x + k - 1$

Etude du signe de $f'_k(x)$

$-\ln x + k - 1 \geq 0 \iff k - 1 \geq \ln x$

$\iff e^{k-1} \geq x$

On obtient le tableau

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f'_k(x)$	||	$+$	0	$-$	
f_k	|| 0	$\nearrow$	$f_k(e^{k-1})$	$\searrow$	$-\infty$

Un maximum est atteint en e^{k-1}

2) $f_k(e^{k-1}) = k(e^{k-1}) - e^{k-1}\ln(e^{k-1})$ $\qquad f_k(e^{k-1}) = y_k$

$= k(e^{k-1}) - e^{k-1} \times (k-1)$

$= ke^{k-1} - ke^{k-1} + e^{k-1}$

$= e^{k-1}$

donc $\quad y_k = x_k$