Exercice 1

1) $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$ De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$

La droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} 2x + 1 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 3x - 6 = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, on obtient $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} 2x + 1 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} 3x - 6 = 0^- \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

asymptote verticale d'équation $x = 2$

3) $f'(x) = \dfrac{2(3x-6) - 3(2x+1)}{(3x-6)^2}$ f est dérivable sur son ensemble de définition.

$f'(x) = \dfrac{-15}{(3x-6)^2}$

4) $\forall x \in]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ $\left.\begin{array}{l} (3x-6)^2 > 0 \\ -15 < 0 \end{array}\right\}$ $f'(x) < 0$

La fonction f est donc strictement décroissante

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	$\frac{2}{3}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\frac{2}{3}$

Exercice 2

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$

Par composition de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2+1 = 10$

$\lim\limits_{x \to 3^-} 3-x = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2+1}{3-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2+1}{3-x} = +\infty$

$\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$

Par composition $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = +\infty$

2) (Bonus) $\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

on obtient $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0^+$

Exercice 3

a) $$\frac{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right) = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{e^x+1} = 1}$$

b) D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0$

Par somme de limites, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)e^x = 0}$

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x^3+x^2} = +\infty}$ (croissances comparées)

d) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^+}(6-2x) = 0^-\\ \lim\limits_{y\to0^-} y^3 = 0^-\end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to3^+}(6-2x)^3 = 0^-$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to3^+}\frac{-2}{(6-2x)^3} = +\infty}$

Exercice 4

1) $f(5) = 3 - 95e^{-5} \approx 2,360$

le coût moyen unitaire est 2 360 € pour une production de 5 hL.

2) a) $f'(x) = -8x\,e^{-x} - (-4x^2+5)\,e^{-x}$

$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$ (on factorise car on va étudier le signe)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2+5}{e^{x}} = 0$ (croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2+5}{e^{x}} + 3 = 3$ (La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$)

c) Etude du signe de $f'(x)$

$\forall x \in [0;+\infty[\quad e^{-x} > 0$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $4x^2 - 8x - 5$

$\Delta = 64 - 4(4)(-5) = 144 > 0$

$\Delta = 12^2$

$x_1 = \dfrac{8+12}{8} = 2,5$ $\qquad x_2 = \dfrac{8-12}{8} = -0,5$

x	$-\infty$		$-0,5$		$2,5$		$+\infty$
$4x^2-8x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble de définition est $[0;+\infty[$

x	0		$2,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	8	$\searrow$	$f(2,5)$	$\nearrow$	3

$f(2,5) \approx 1,358$

3) D'après le tableau, le minimum est atteint en $x = 2{,}5$ hL
L'entreprise doit produire 250 L de peinture pour minimiser le coût moyen unitaire. le coût est alors de 1358 €
(arrondi à l'euro près)

4) En utilisant la calculatrice, on résout $f(x) = 3$
on trouve $x \approx 1{,}12$ soit 112 L
le seuil de rentabilité est à partir de 112 L.

Exercice 5

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x^4 = +\infty$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme
$f'(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
1 est une racine évidente donc on peut factoriser par $(x-1)$

$f'(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$

$f'(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

4) $T_2 : y = -3(x-2) + \frac{1}{4}$

$y = -3x + 6{,}25$

5) (BONUS)

	nombre de points d'intersection
si $m \in]-\infty ; -2[$	0
si $m = -2$	2
si $m \in]-2 ; 2[$	4
si $m = 2$	3
si $m \in]2 ; +\infty[$	2