

Exercice 1 (6 points)

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite si elle existe.

$$U_n = \frac{2n^2 + n}{3n^2 + 4} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$X_n = n + 2(-1)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$V_n = \frac{n^3 - n^2}{4n^2 + 1}$$

$$Y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$W_n = \frac{1 + (0.9)^n}{1 + (1.1)^n}$$

$$Z_n = \frac{1 + \cos n}{n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

Exercice 2 (3 points)

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{5 - 4n^3}{n + 2}$

- 1) Quelle est la limite de cette suite
- 2) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $V_n < -10^4$
- 3) Compléter les lignes 3,4,5,6 du script en Python qui répond à la question 2)

```
1 N=0
2 V=2.5
3 while
4     N=
5     V=
6 print()
```

Exercice 3 (4 points)

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ pour tout $n \geq 1$

- a) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 .
- b) Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .
- c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
- d) Donner la valeur de u_{2023} .

Exercice 4 (7 points)

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

- 1) Calculer u_1
- 2) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0.9u_n + 250$
- 3) a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n \leq 2500$
 - b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
- 5) Soit (W_n) la suite définie par $W_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n .
 - a) Démontrer que la suite (W_n) est géométrique.
 - b) Pour tout entier naturel n , exprimer W_n , puis u_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter dans le contexte de l'exercice.
- 6) En quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 2200 ?

Exercice bonus (2 points)

Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.