Exercice 1

* $$\frac{2n^2+n}{3n^2+4} = \frac{2\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3\cancel{n^2}\left(1+\frac{4}{3n^2}\right)}$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \lim\left(1+\frac{4}{3n^2}\right) = 1$$

donc $\lim U_n = \frac{2}{3}$

* $$\lim V_n = \lim \frac{n^3}{4n^2} = \lim \frac{n}{4} = +\infty$$

* $\lim (0,9)^n = 0$ car du type q^n avec $0<q<1$

$\lim 1,1^n = +\infty$ car du type q^n avec $q>1$

$\left.\begin{array}{l}\lim 1+0,9^n = 1\\ \lim 1+1,1^n = +\infty\end{array}\right\}$ par quotient de limites, on obtient $\lim W_n = 0$

* $$-2 \leq 2(-1)^n \leq 2$$

$$\boxed{n-2 \leq n+2(-1)^n} \leq 2+n$$

$\lim n-2 = +\infty$ donc par comparaison de limites

on obtient $\lim\left(n+2(-1)^n\right) = +\infty$

* $$Y_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ car du type q^n avec $-1<q<1$

$$\lim Y_n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$

*

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

$$0 \leq 1+\cos n \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1+\cos n}{n} \leq \frac{2}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

$$\lim \frac{2}{n} = 0$$ donc par le Théorème "des gendarmes" on obtient que $\lim \frac{1+\cos n}{n} = 0$.

Exercice 2

1) $\lim V_n = \lim \frac{-4n^3}{n} = \lim (-4n^2) = -\infty$

2) Dans la calculatrice on entre la suite explicite (V_n) puis on regarde la table des valeurs
La plus petite valeur telle que $V_n < -10\,000$
est $n = 51$

3)

```
N = 0
V = 2,5
while V >= 10 000 :
    N = N + 1
    V = (5-4*N**3)/(N+2)
print(N)
```

$\boxed{>=}$

Exercice 3

a) $u_2 = \frac{1}{2}$ $\quad u_3 = \frac{2}{3}$ $\quad u_4 = \frac{3}{4}$ $\quad u_5 = \frac{4}{5}$

b) Conjecture : Il semblerait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = \frac{n-1}{n}$

c) Initialisation

si $n = 1$ $\quad \frac{n-1}{n} = \frac{0}{1} = 0$ et $u_1 = 0$

donc $u_1 = \frac{1-1}{1}$ et donc la formule est vraie si $n = 1$

Hérédité

Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_p = \frac{p-1}{p}$

$$u_{p+1} = \frac{1}{2 - u_p}$$

$$u_{p+1} = \frac{1}{2 - \frac{p-1}{p}}$$

$$u_{p+1} = \frac{1}{\frac{2p-(p-1)}{p}}$$

$$u_{p+1} = \frac{1}{\frac{p+1}{p}}$$

$$u_{p+1} = \frac{p}{p+1}$$ l'hérédité est ainsi montrée

d) $u_{2023} = \frac{2022}{2023}$

Exercice 4

1) $u_1 = \frac{90}{100} \times 1000 + 250 = 1150$

2) $u_{n+1} = \left(u_n - \frac{10}{100} u_n\right) + 250$

$u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) u_n + 250$ 1

$u_{n+1} = \underset{\text{perte de 10 \% des abonnés}}{0,9\, u_n} + \underset{\text{nouveaux abonnés}}{250}$

3) a) Initialisation

$u_0 = 1000$ donc $u_0 \leq 2500$

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q $u_k \leq 2500$

$u_k \leq 2500$

$0,9\, u_k \leq 0,9 \times 2500$ car $0,9 > 0$

$0,9\, u_k + 250 \leq 2250 + 250$ 1

$u_{k+1} \leq 2500$

L'hérédité est démontrée

b) $u_{n+1} - u_n = 0,9\, u_n + 250 - u_n$

$= -0,1\, u_n + 250$ 1

$= 0,1(-u_n + 2500)$

D'après la question a), on a $-u_n + 2500 \geq 0$
Par ailleurs $0,1 > 0$
$\Big\}$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc la suite (u_n) est croissante

c) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

0,5

4/5

5) a) $W_{n+1} = u_{n+1} - 2500$

$= 0,9\, u_n + 250 - 2500$

$= 0,9\,(W_n + 2500) + 250 - 2500$

$= 0,9\, W_n + 2250 - 2250$ 1

$= 0,9\, W_n$

La suite (W_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de premier terme $W_0 = -1500$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = -1500 \times 0,9^n$ $(*)$

$W_n = u_n - 2500$ $(**)$

En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient

$-1500 \times 0,9^n = u_n - 2500$

$u_n = 2500 - 1500 \times 0,9^n$ 1

c) $\lim 0,9^n = 0$ donc $\lim(-1500 \times 0,9^n) = 0$

Ce qui nous donne $\lim u_n = 2500$ 0,5

Cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse se stabilisera à 2500 abonnés au bout d'un grand nombre d'années.

6) On cherche $n \in \mathbb{N}$ t. q. $u_n > 2200$

Grâce au tableur de la calculatrice, on trouve $n = 16$ 1

c'est à dire en 2036.

5/5