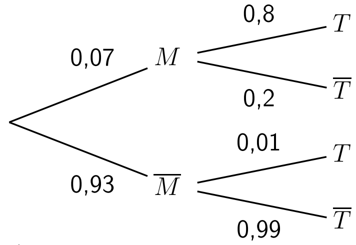
Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

b. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0{,}009\,3$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0{,}009\,3 = 0{,}065\,3$.

3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0{,}065\,3} \approx 0{,}857\,58$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0{,}065\,3$ car les événements sont identiques, indépendants, successifs et ont deux issues possibles.

b. On a $P(X = 2) = \dbinom{10}{2} \times 0{,}065\,3^2 \times (1 - 0{,}065\,3)^{10-2} = \dbinom{10}{2} \times 0{,}065\,3^2 \times 0,9347^8 =$
$45 \times 0{,}065\,3^2 \times 0,9347^8 \approx 0{,}111\,8$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.

2. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0{,}065\,3^0 \times (1 - 0{,}065\,3)^n = 1 - 0{,}934\,7^n$ et on veut que :
$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0{,}934\,7^n > 0,99 \iff 0,01 > 0{,}934\,7^n$ soit en prenant le logarithme népérien :
$\ln 0,01 > n \ln 0{,}934\,7 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0{,}934\,7} < n$.
Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0{,}934\,7} \approx 68,2$.
Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

Partie C

Cet algorithme permet simuler une loi binomiale $\mathcal{B}(\ 100\ ;\ 0{,}065\,3\ )$.
Comme on exécute cet algorithme un très grand nombre de fois, la valeur calculée est l'espérance donc :
$E(X) = 100 \times\ 0{,}065\,3\ = 6,53$.

Exercice 2 (10 points)

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$
donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires
et A, B, C ne sont pas alignés, ils définissent
donc le plan (ABC).

2) a) $\vec{u}\cdot\vec{AB} = 2+1-3 = 0$
$\vec{u}\cdot\vec{AC} = 4+5-9 = 0$
$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)
donc (Δ) est orthogonale au plan (ABC).

b) $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
(ABC) : $2x - y + 3z + d = 0$
$A \in (ABC) \Leftrightarrow 0-4+3+d=0 \Leftrightarrow d=1$
le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x-y+3z+1=0$

c) une représentation paramétrique de Δ est :
$$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

d) $H \in (\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 7+2t \\ y_H = -1-t \\ z_H = 4+3t \\ 2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0 \end{cases}$

$2(7+2t) - (1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 28 + 14t = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$H(3\,;\,1\,;\,-2)$

3 a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à $(\mathcal{S}_1)$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à $(\mathcal{S}_2)$
$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires
donc $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ sont sécants suivant une droite.

4/8

b) Soit $d : \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$(-4t-2) + t + (3t+2) = 0$ donc $(d) \subset (\mathcal{P}_1)$

$(-4t-2) + 4 \times t + 2 = 0$ donc $(d) \subset (\mathcal{P}_2)$

Donc $(d) = (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$

c) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d)

$\vec{u}$ vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -8 - 1 + 9 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}$

donc $(d) \parallel (ABC)$

$I(-2\,;\,0\,;\,2) \in (d) \quad (t = 0)$

$2 \times (-2) - 0 + 3 \times 2 + 1 = -4 + 7 = 3$

$3 \neq 0$ donc $I \notin (ABC)$

Conclusion : (d) et (ABC) sont strictement parallèles.

5/8