Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 5 pts Ex2 : 5 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 5 pts

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$

b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$

c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$

d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

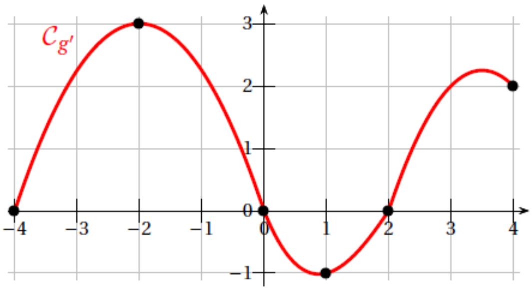
5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

d. g admet un minimum en 0.



Exercice 2

Soif f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{4x}{1+3x}$

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) Calculer u_1

2) On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2}\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 2$

b) En déduire que (u_n) est convergente.

c) Résoudre l'équation $f(l)=l$ et en déduire la limite de (u_n).

3)a) Recopier et compléter le script Python ci-dessous qui détermine la plus petite valeur de n telle que $1-u_n<0.001$

```python
u=0.5
n=0
while
    u=
    n=n+1
print(n)
```

b) Quelle est la valeur de n renvoyée par ce script ?

4) On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n, par : $W_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$

a) Montrer que la suite (W_n) est géométrique de raison 4.
En déduire l'expression de (W_n) en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout n entier naturel, on a : $u_n=\dfrac{W_n}{W_n+1}$

c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\dfrac{1}{1+0.25^n}$
Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\,+\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

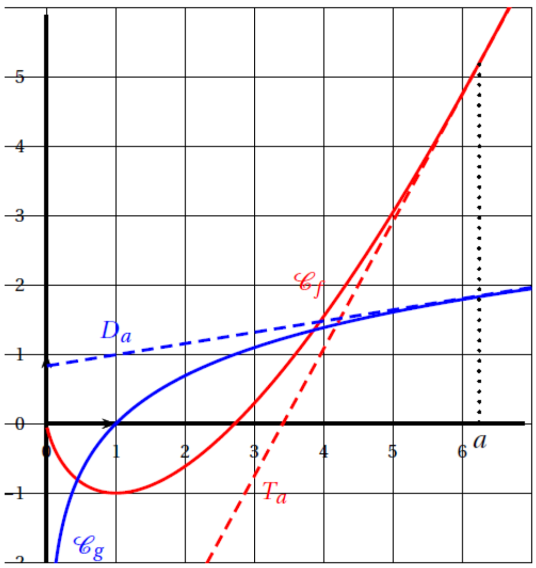
Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a;
- D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



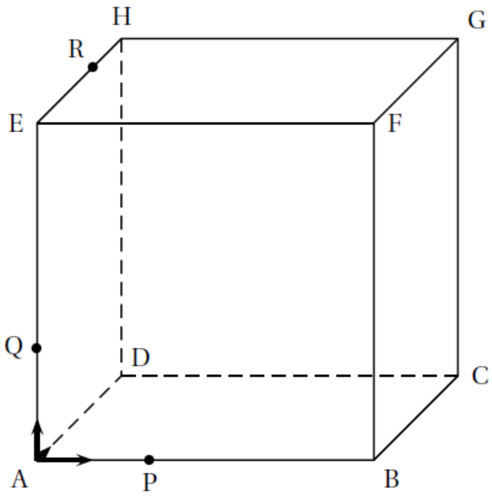
On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Exercice 4



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .

   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

   c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points $J(6;4;0)$ et $K(6;6;2)$.

   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.