Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 5 pts Ex2 : 5 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 5 pts

Exercice 1

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{x^2}$
c. $f'(x) = (1+2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$
d. $f'(x) = (2+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x^2} + x \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

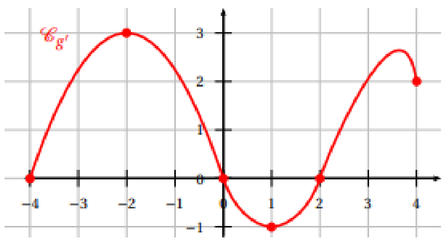
$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :
a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
d. g admet un minimum en 0.



La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

Exercice 2

1. On a donc pour $n=0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant 2$, donc : $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité : on suppose que pour $n \geqslant 0$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

Or on a vu que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \dfrac{8}{1+6} = \dfrac{8}{7}$;

de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{8}{7}$.

Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :

$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. a. On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$:

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u >= E
        u = 4 * u/(1 + 3 * u)
        n = n + 1
    return n
```

b. On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1+3u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+3u_n-4u_n} = \dfrac{4u_n}{1-u_n} = 4\dfrac{u_n}{1-u_n} = 4v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff$
$v_n = u_n(v_n+1)$.
Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n+1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :
$u_n = \dfrac{4^n}{4^n+1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$:
$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0,25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1+0,25^n}$.
Comme $0 < 0,25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Par produit on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = -\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

3. La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $1-\ln x$:

- $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$:
  la fonction h est donc strictement croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$;
- $1-\ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$:
  la fonction h est donc strictement décroissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;
- $1-\ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$:
  la fonction h a un maximum $f(\mathrm{e}) = 1 + \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

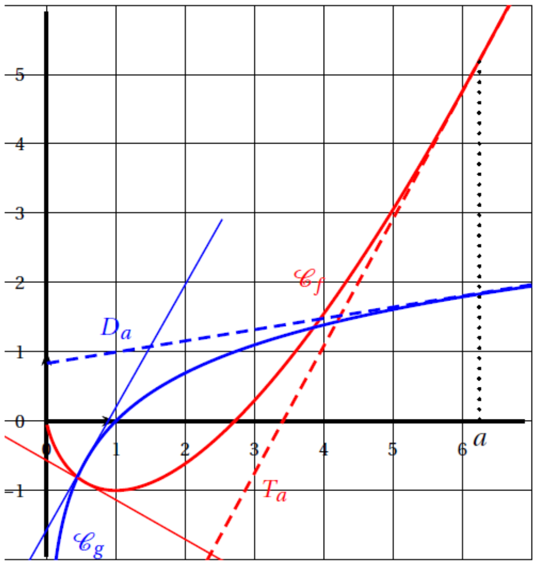
D'où le tableau de variations de h :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

5. Comme $1 + \frac{1}{\mathrm{e}} > 1 > 0$, le tableau de variations montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\,;\,\mathrm{e}[$.
On a $f(1) = 1 + \dfrac{0}{1} = 1$, donc $0 < \alpha < 1$;
La calculatrice donne : $f(0,5) \approx -0,4$ et $f(0,6) \approx 0,15$, donc $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Soit les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.



1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $f'(a) = \ln(a)$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $g'(a) = \dfrac{1}{a}$.

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à -1, soit :
$\ln(a) \times \dfrac{1}{a} = -1 \iff \dfrac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \dfrac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$
et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution $a = \alpha$: il existe une seule valeur de a telle que les droites T_a et D_a sont perpendiculaires : $a = \alpha$.
Voir la figure.

Exercice 4

1. (a) On a $P(2\,;\,0\,;\,0)$; $Q(0\,;\,0\,;\,2)$ et $\Omega(3\,;\,3\,;\,3)$.

   (b) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQR) si, et seulement si, il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
   On doit avoir $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PQ} = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PR} = 0$ donc :
   $\begin{cases}-2+2c=0\\-2+4b+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=1\\b=-1\end{cases}$.

   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ sont $\boxed{\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

   (c) Une équation du plan (PQR) est : $1\left(x - x_P\right) - 1\left(y - y_P\right) + 1\left(z - z_P\right) = 0 \Leftrightarrow$
   $x - 2 - y = z = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - y + z - 2 = 0}$.

2. (a) On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Un vecteur directeur de Δ est donc $\overrightarrow{n}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\boxed{\begin{cases} x = 3+t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$.

(b) Les coordonnées du point d'intersection I de Δ et du plan (PQR) vérifient la représentation paramétrique et l'équation cartésienne du plan.

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

On en déduit : $(3+t)-(3-t)+(3+t)-2 = 0 \Leftrightarrow 3t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$.

On calcule alors les valeurs de x, y et z.

Les coordonnées de I sont $\mathrm{I}\left(3-\dfrac{1}{3}\,;\,3+\dfrac{1}{3}3-\dfrac{1}{3}\right)$ donc $\boxed{\mathrm{I}\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)}$.

(c) Avec $\Omega(3\,;\,3\,;\,3)$, on a

$\Omega\mathrm{I}^2 = \left(3-\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(3-\dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(3-\dfrac{8}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9}$, d'où $\Omega\mathrm{I} = \sqrt{\dfrac{3}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. On considère les points $\mathrm{J}(6; 4; 0)$ et $\mathrm{K}(6; 6; 2)$.

(a) $x_J - y_J + z_J - 2 = 6-4+0-2 = 0$ donc $\boxed{J \in (PQR)}$.

(b) $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}O\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$; ces deux vecteurs sont colinéaires donc les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

(c) Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).

On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.