Exercice 1 (3 points)

Résoudre les équations suivantes.

$\ln(1-x) = 3$

$\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$

Exercice 2 (3 points)

Je place une somme S à 3% d'intérêts composés annuels le 01/01/2023.
Combien d'années sont nécessaires pour que cette somme double ?

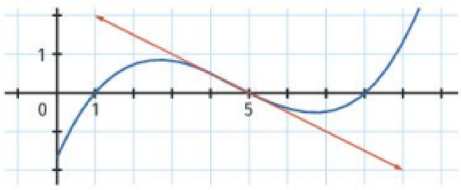
1) Répondre à cette question en utilisant la fonction logarithme népérien.

2) Compléter les lignes 4,5,6 du script ci-dessous qui répond au même problème.

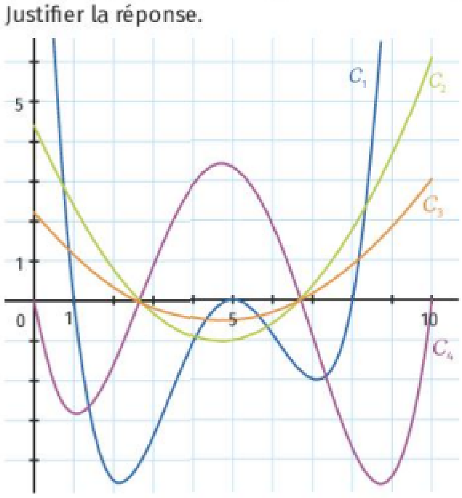
```
1  from math import*
2  S=1000          #1000 euros somme initiale
3  N=0
4  while S
5    N=
6    S=
7  print(N)
```

Exercice 3 (2 points)

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur [0 ; 10] dont la tangente au point d'abscisse 5 est tracée.

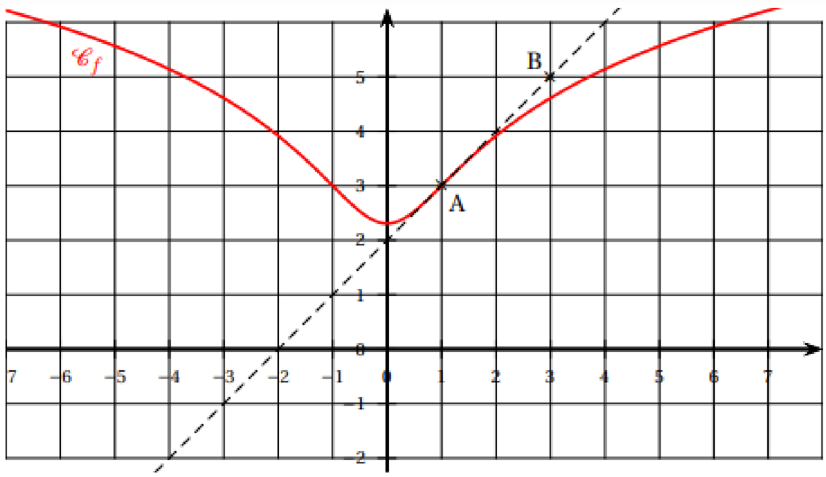


Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer celle qui correspond à la courbe de la fonction dérivée f' de f. Justifier la réponse.



Exercice 4 (7 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3; 5).
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 5 (5 points)

PARTIE A
Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$

1) Etudier les variations de u sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

2)a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
b) A l'aide de la calculatrice,déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$

PARTIE B
On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0;\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $]0;\infty[$.

PARTIE C (BONUS)
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln
- A le point de coordonnées $(0;2)$
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0;+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$

2) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.
b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$