

Exercice 1

$$1) \ln(1-x) = 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad 1-x = e^3 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 1-e^3$$

$$1-x > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x < 1$$

$$1-e^3 \approx -15 \quad 1-e^3 < 1 \quad \text{Cette solution appartient bien à l'ensemble de définition}$$

$$S = \{1-e^3\}$$

$$2) \ln(-3x) = \ln(x^2-4)$$

$$\begin{cases} -3x > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -2 > x \text{ ou } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

$$\text{ensemble de définition : }]-\infty; -2[$$

$$-3x = x^2-4 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2+3x-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x=1 \text{ ou } x=-4$$

$$-4 \in]-\infty; -2[$$

$$1 \notin]-\infty; -2[$$

Il y a donc une unique solution

$$S = \{-4\}$$

Exercice 2

1) On cherche n tel que

$$1,03^n > 2$$

$$\ln(1,03^n) > \ln 2$$

$$n \ln(1,03) > \ln 2$$

$$n > \frac{\ln 2}{\ln(1,03)}$$

$$\ln(1,03) > 0$$

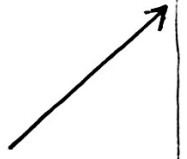
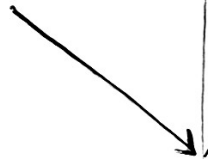
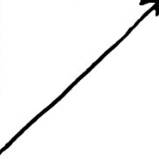
$$\frac{\ln 2}{\ln(1,03)} \approx 23,45$$

Pour doubler le capital 24 années sont nécessaires.

2) while $S < 2000$:
 $N = N + 1$
 $S = S * 1,03$

Exercice 3

Le premier graphique nous permet d'obtenir les variations de f

x	0	3	7	10
f				
$f'(x)$	+	-	+	

De plus, on lit : $f'(5) = -\frac{1}{2}$ (c'est à dire de la tangente en 5)

Parmi les 4 courbes proposés on cherche celle qui est positive, négative, positive. C_2 et C_3 sont les candidates
 Mais pour C_3 , l'image de 5 est $-0,5$

réponse : C_3

Exercice 5

PARTIE A

$$1) \quad u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} \quad 1$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 2x^2 + 1 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \forall x \in]0; +\infty[\quad u'(x) > 0$$

limite en 0

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ on obtient } \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$$

limite en $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad 0,5$$

2)a)

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		+
u	$-\infty$	$+\infty$

• Sur $]0; +\infty[$ la fonction u est continue et strictement croissante

• $0 \in]-\infty; +\infty[$

• D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$ 1

Par balayages successifs à la calculatrice

$$1 < \alpha < 2$$

$$1,3 < \alpha < 1,4$$

$$1,31 < \alpha < 1,32 \quad \leftarrow \text{encadrement d'amplitude de } 0,01$$

3)

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

obtenu grâce à u
qui précède

0,5

4) α est l'unique solution de $u(x) = 0$

donc $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$

0,5

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

PARTIE B

1) $f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = 2x + \frac{-4 + 2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4 + 2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2u(x)}{x} \quad 1$$

2) le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $u(x)$

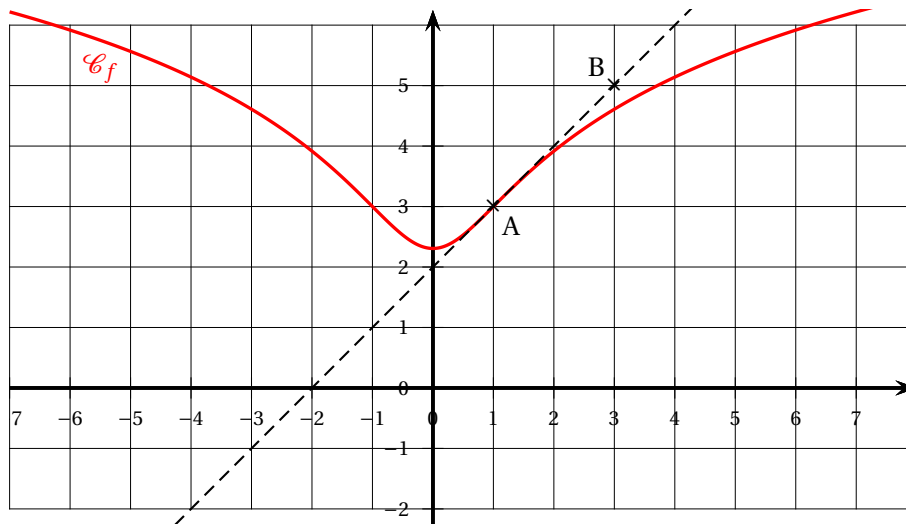
$$\forall x \in]0; +\infty[\quad 2 > 0 \text{ et } x > 0$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

1

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln x)^2 = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x)^2 = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
2. a. Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, on a $ax^2 \geq 0$, donc $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$.

b. Les résultats du 1. peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :

$$\ln(1 + 1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2.$$

$$\text{On a donc sur } \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2.$$

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Quel que soit le réel x , $f(-x) = \ln[(-x)^2 + 1] + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = f(x)$. La fonction f est donc paire (la représentation graphique de f est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées).
2. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(ax^2 + 1) = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction étant paire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x , la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x$, donc : $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}_-^* et $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R}_+^* . Conclusion f est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur \mathbb{R} . D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln 2$	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.

5. $f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4 \iff x^2 + 1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1 .

2. Comme $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , le dénominateur étant non nul; f' est donc dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

3. On a donc $f''(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff \begin{cases} 1 + x = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ Donc $S = \{-1; 1\}$.

La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1 - x^2$ est positif soit sur l'intervalle $] -1; 1[$. Donc la fonction f est convexe sur $] -1; 1[$.