Exercice 1

$$g'(x) = \frac{-13}{(2x-3)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-5}}$$

$$k'(x) = 6x^5(x^2+3)^2(2x^2+3)$$

Exercice 2

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^3}{2x^3+x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

b) $$\frac{e^{2x}-2}{e^x+1} = \frac{e^x\left(e^x-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\frac{2}{e^x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-2}{e^x+1} = +\infty$$

c) $$\frac{x+1}{-x^2-x+6} = \frac{x+1}{-(x-2)(x+3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to2^-} -(x-2)(x+3) = 0^+ \end{array}\right\} \lim_{x\to2^-} \frac{x+1}{-x^2-x+6} = +\infty$$

d) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to2^+} -(x-2)(x+3) = 0^- \end{array}\right\} \lim_{x\to2^+} \frac{x+1}{-x^2-x+6} = -\infty$$

e) $$\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} (1-x) = 0^-$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} (1-x)^3 = 0^-$ (puissance impaire)

D'où $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{(1-x)^3} = -\infty$

Exercice 3

1) $f(x) = 3 + x \times e \times e^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (ex) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right\}$$

Par produit de limite $\lim\limits_{x \to -\infty} (ex) \times e^{-x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) $f(x) = 3 + x \times e \times e^{-x}$

$f(x) = 3 + \frac{x \times e}{e^x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées)

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ex}{e^x} = 0$ $\quad$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

4) $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{1-x} \qquad v'(x) = -e^{1-x}$

$$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x}$$

$$f'(x) = (1-x)e^{1-x}$$

5) Etude du signe de $f'(x)$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(1-x)$

$1-x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant x$

$e^{1-x} > 0$ pour tout x réel

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

$f(1) = 3 + 1e^0 = 4$

Exercice 4

PARTIE A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = -12x^2 - 6x$$
$$g'(x) = -6(2x^2 + x)$$
$$g'(x) = -6x(2x+1)$$

$2x + 1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-2{,}25$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2{,}25$

$g(0) = -2$

2) * Sur l'intervalle $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$

- La fonction g est continue et strictement décroissante
- $0 \in [-2{,}25 ; +\infty[$

D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution. On la notera α

* Sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; 0\right]$
  $0 \notin]-2{,}25 ; -2]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution
* Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$
  $0 \notin]\infty ; -2[$ pas de solution

<u>Conclusion</u> : L'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Par balayages successifs à la calculatrice, on obtient :

$$-2 < \alpha < -1$$

$$-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$$

$$-1{,}14 < \alpha < -1{,}13$$

$$-1{,}137 < \alpha < -1{,}136$$

$$-1{,}1369 < \alpha < -1{,}1368$$

$\alpha \approx -1{,}137$ valeur arrondie à 10^{-3}

3) D'après le tableau de variation, on obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^3} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^3} = 0$

asymptote horizontale d'équation $y = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (2x+1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^3-1) = 0^-$

par quotient de limits $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2x+1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} x^3-1 = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

asymptote verticale d'équation $x = 1$

2) a) f est du type $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = x^3-1$ $\quad v'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{2(x^3-1) - (2x+1)3x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

le signe de $f'(x)$ est donc le même que le signe de $g(x)$

car on a : $(x^3-1)^2 > 0$

On obtient par conséquent le tableau de signe qui suit :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	0

3) a) Tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 :

$$y = f'(0)x + f(0)$$

$f'(0) = \frac{g(0)}{1} = -2$

$f(0) = -1$

$$\boxed{y = -2x - 1}$$

3) b)

$$f(x)-(-2x-1) = \frac{2x+1}{x^3-1} + 2x+1$$

$$= \frac{2x+1+(2x+1)(x^3-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(2x+1)\,x^3}{(x^3-1)}$$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Sur les intervalles $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et $[0 ; 1[$ $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T.

Sur les intervalles $[-\frac{1}{2} ; 0]$ et $]1 ; +\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T.