Exercice 1

* **Initialisation**

$U_0 = 2$

$\dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$ } donc $U_0 = \dfrac{2}{2.0+1}$

La formule est vraie si $n=0$

* **Hérédité**

Supposons qu'il existe un nombre entier naturel k tel que $U_K = \dfrac{2}{2K+1}$

D'après l'énoncé :

$$u_{K+1} = \frac{U_K}{1+U_K}$$

$$u_{K+1} = \frac{\frac{2}{2K+1}}{1+\frac{2}{2K+1}}$$

$$u_{K+1} = \frac{\frac{2}{K+1}}{\frac{2K+1+2}{K+1}}$$

$$u_{K+1} = \frac{2}{K+1} \times \frac{K+1}{2K+3}$$

$$u_{K+1} = \frac{2}{2(K+1)+1}$$

L'hérédité est montrée

Finalement, on a montré par récurrence que pour tout n entier naturel, on a $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

Exercice 2

* $\lim U_n = \lim \dfrac{5n}{3n^2} = \lim \dfrac{5}{3n} = 0$ car $\lim 3n = +\infty$

* $\lim V_n = \lim \dfrac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 3$

$\lim (-0,4)^n = 0$ 		si n est pair $(-0,4)^n > 0$
si n est impair $(-0,4^n) < 0$

(W_n) n'a pas de limite

<u>Remarque</u> : On peut créer se qu'on appelle des suites extraites

$P_n = W_{2n}$ 		Cette suite a pour limite $+\infty$

$I_n = W_{2n+1}$ 		———————————— $-\infty$

---

* $\lim (0,9)^n = 0$ car du type q^n avec $0 < q < 1$

donc $\lim X_n = 4$

* En fait on a : $\lim (0,9)^n = 0^+$ donc $\lim X_n = 4^+$

Par conséquent, $\lim (4 - X_n) = 0^-$

Par quotient de limites, on obtient $\lim \dfrac{1}{4 - X_n} = -\infty$

* $Z_n = 1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$

$$Z_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$Z_n = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = 1$

et finalement $\lim Z_n = \frac{5}{4}$

Exercice 3

1) Dans la calculatrice on définit la fonction

$$f(x) = \frac{2x^3+3}{x^3+1}$$

La fonction tableau de valeurs de la calculatrice (avec un step=1)

Le plus petit entier cherché est $n = 10$

2)

```
N = 0
U = 3
while U >= 2,001 :
        N = N + 1
        U = (2 * N ** 2 + 3) / (N ** 3 + 1)
print (N)
```

Exercice 4 (8 points)

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $0,85$; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

   a.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
     $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
   - $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

   b. On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

   c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

   $a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \dfrac{500}{2800} > 0,85^n$

   $$\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln(0;85^n) \iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln(0;85) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

f est une fonction rationnelle définie sur $[0~,~+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ sur $[0~,~+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times u_0+4}{u_0+1} = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

  La fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$ donc sur $[0~;~4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

  $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

  On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.