Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves choisiront 3 exercices pari les 4 exercices proposés.

Chaque exerice est noté sur 7 points pour un total de 21 points.

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

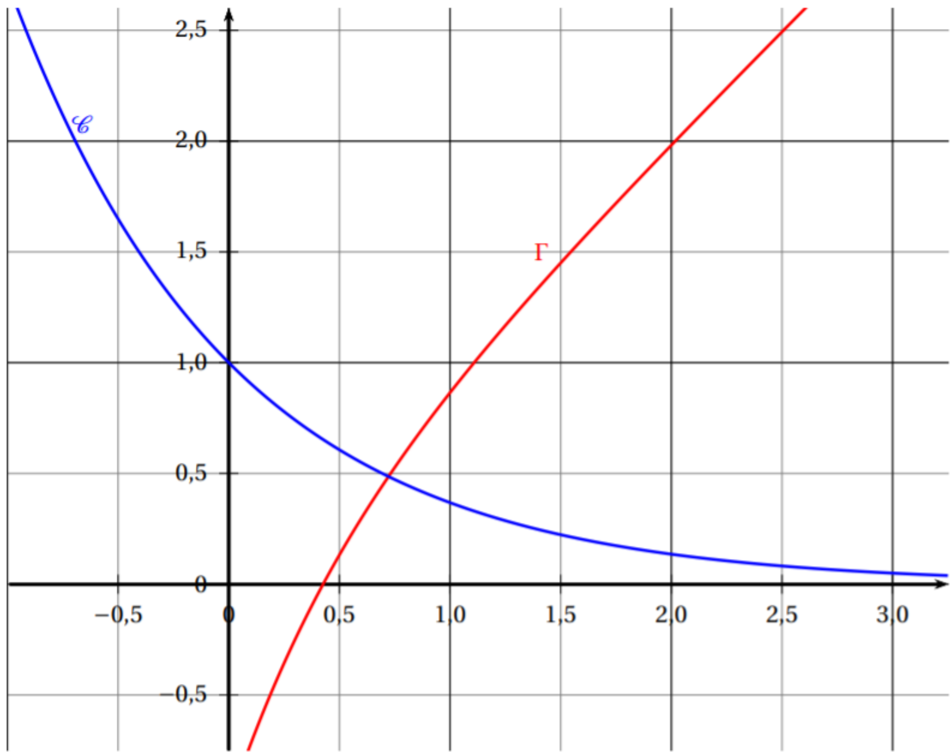
La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :
   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$
   a. Montrer que, pour tout nombre réel t,
   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$
   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.
2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.
   a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

   b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
   Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**



Exercice 2

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 3

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

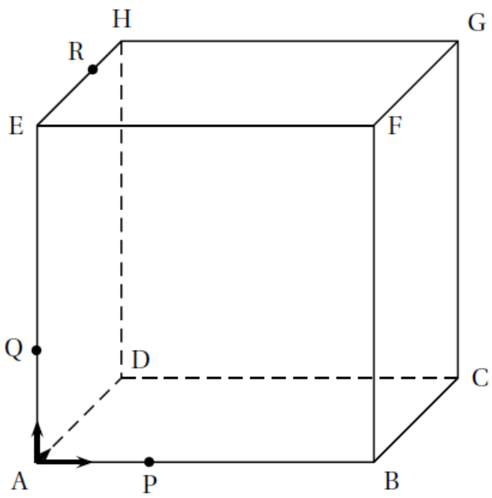
- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 4



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

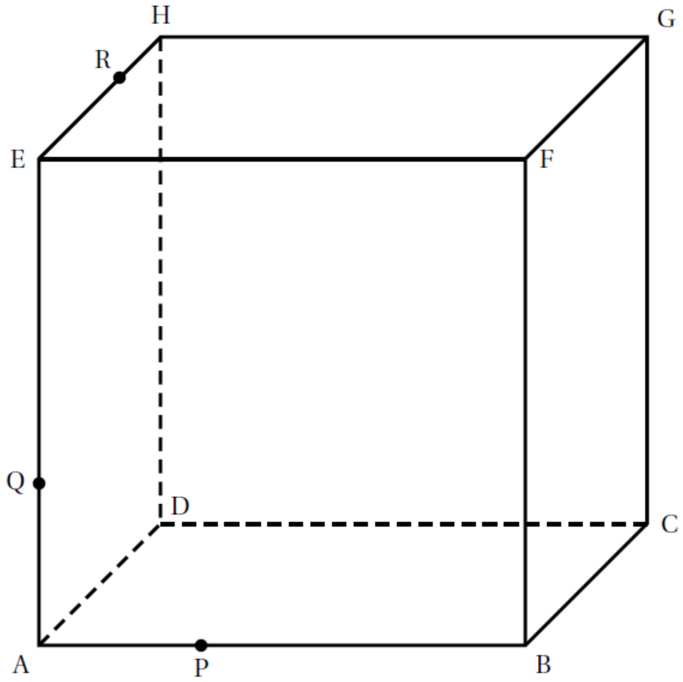
Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.
   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .
   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.
2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.
   c. Calculer la distance ΩI.
3. On considère les points J$(6\,;4\,;0)$ et K$(6\,;6\,;2)$.
   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).
   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.
   c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.


H
G
R
E
F
Q
D
C
A
P
B