Exercice 1

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. • On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, donc $1 + 2\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.
3. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante ; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;
   $f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;
   $f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.
4. On a donc :
   - sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
   - sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$;
   - et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1. $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$
   a. Soit $u(t) = t^2 + \mathrm{e}^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$ fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et h dérivables.
   Donc $h'(t) = \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \dfrac{2t - 2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{t - \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$.
   b. Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.
   Donc :
   - sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ;
   - sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
   - et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.

   La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $\mathrm{e}^{-\alpha}$.
   Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point A$(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$.
   α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe $\mathscr{C}$ au point A
2. **a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-\alpha}$
   b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-\mathrm{e}^{-\alpha} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha}$.
   or on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - \mathrm{e}^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = \mathrm{e}^{-2\alpha} \iff \dfrac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à -1. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Exercice 2

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85 ; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

   a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
   $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$

   • $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

   b. On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

   c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

   $a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \dfrac{500}{2800} > 0,85^n$

   $$\iff \ln\left(\dfrac{500}{2800}\right) > \ln(0;85^n) \iff \ln\left(\dfrac{5}{28}\right) > n \times \ln(0;85) \iff \dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

   f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

   $f'(x) = \dfrac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

   $f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   - **Initialisation**

     $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times u_0+4}{u_0+1} = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

     $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

     La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

     $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

     On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   b.
   - Pour tout n, on a; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
   - Pour tout n, on a; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

   La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

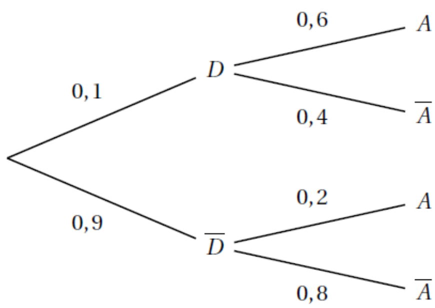
   La suite $\left(3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

   D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 4$.

   Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

Exercice 3

1. On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :
$P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :
$P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = 0,75$.

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7\,;\,0,24)$.

b. La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
$P(X=1) = \dbinom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1-0,24)^{7-1} \approx 0,32$.

c. La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,24)$.
La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :
$P(Y=0) = \dbinom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

b. On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.
On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à-dire $1 - P(Y=0) \geqslant 0,99$ ou encore $P(Y=0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0,76^n \leqslant 0,01$:
$0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,76^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$
Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 4

a.

Solution : P(2 ; 0 ; 0) , Q(0 ; 0 ; 2) et Ω(3 ; 3 ; 3)

b.

Solution : R(0 ; 4 ; 6) donc $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{QR}=0\end{cases} \iff \begin{cases}-2+4b+6c=0\\ 4b+4c=0\end{cases} \iff \begin{cases}2b=-2\\ c=-b\end{cases} \iff \begin{cases}b=-1\\ c=1\end{cases}$

Finalement $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR)

c.

Solution :
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) : $x-y+z+d=0$.
Or P(2 ; 0 ; 0) ∈ (PQR) donc $x_P-y_P+z_P+d=0$.
Finalement (PQR) : $x-y+z-2=0$.

a.

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc $\overrightarrow{n}$ est directeur de Δ, de plus Ω(3 ; 3 ; 3) ∈ Δ.

On en déduit : Δ : $\begin{cases}x=3+t\\ y=3-t\\ z=3+t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

b.

Solution : Si on pose $t=-\frac{1}{3}$ dans la représentation précédente on obtient les coordonnées de I donc I ∈ Δ.
De plus $x_I-y_I+z_I-2=\frac{8}{3}-\frac{10}{3}+\frac{8}{3}-2=0$ donc I ∈ (PQR).
Finalement Δ coupe le plan (PQR) au point I $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

c.

Solution :
$\Omega I=\sqrt{(x_I-x_\Omega)^2+(y_I-y_\Omega)^2+(z_I-z_\Omega)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

a.

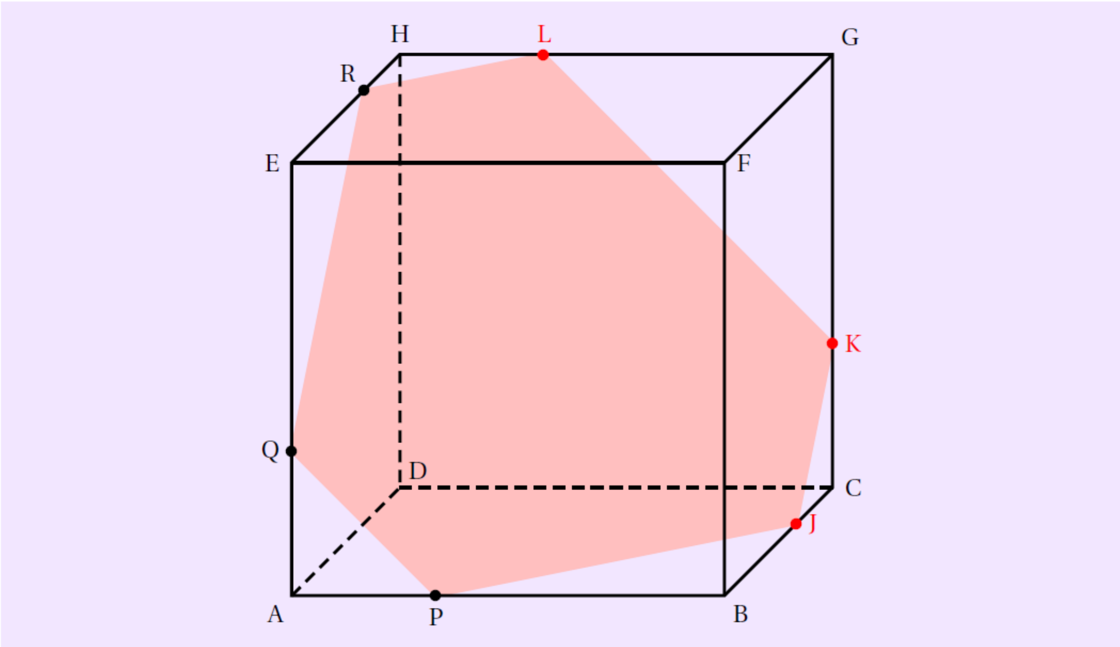
Solution : $x_J-y_J+z_J-2=6-4-2=0$ donc J ∈ (PQR).

b.

Solution :
$\overrightarrow{JK}$ (0 ; 2 ; 2) or $\overrightarrow{QR}$ (0 ; 4 ; 4) donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que (JK) et (QR) sont parallèles.

c.

Solution : J et K sont respectivement sur les arêtes [BC] et [CG] du cube
On place J et K aisément en remarquant que $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$
J ∈ (PQR) et (JK) est parallèle à (QR) donc (JK) ⊂ (PQR).
(PQR) coupe la plan (ABE) suivant la droite (QP)
donc (PQR) coupe le plan (CDG) suivant une parallèle à (QP) passant par K.
Soit L le point d'intersection entre cette droite et l'arête [GH].
La section du cube par le plan (PQR) est l'hexagone JKLRQP



H
L
G
R
E
F
K
Q
D
C
J
A
P
B