

Exercice 1 (6 points)

Un restaurateur spécialisé propose deux menus différents : un menu A et un menu B.
On observe que 60% des clients choisissent le menu A.

1) Chacun des menus peut être pris avec ou sans dessert. On a remarqué que 60% des clients choisissent un menu avec dessert et que $\frac{2}{3}$ des clients qui prennent le menu A choisissent un menu avec dessert.

On choisit un client au hasard. On note :

- . A l'événement "le client choisit le menu A"
- . B l'événement "le client choisit le menu B"
- . D l'événement "le client choisit un menu avec dessert"

(a) Déterminer $P(A)$ et $P(A \cap D)$.

(b) Un client a choisit le menu B. Quelle est la probabilité qu'il ait pris un dessert ?

(c) Les événements B et D sont-ils indépendants ?

2) On rappelle que la probabilité qu'un client choisisse un menu A est 0,6.

Le prix d'un menu A est de 20€ et le prix d'un menu B est de 30€.

Le restaurant reçoit chaque jour 80 clients.

Le choix d'un client est indépendant du choix d'un autre client.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients choisissant le menu A un jour donné.

On donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-4} près.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

(b) Quelle est la probabilité qu'exactly 50 clients choisissent le menu A un jour donné ?

(c) Quel est le chiffre d'affaire journalier moyen du restaurateur ?

Exercice 2 (6 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables au toucher.

L'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 boules noires.

L'urne U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la place dans U_2 .

On tire ensuite au hasard une boule dans U_2 .

L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

Soit les événements :

B_1 : "on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1 "

B_2 : "on a tiré une boule blanche dans l'urne U_2 "

A) 1) Faire un arbre de probabilité.

2) Calculer la probabilité de B_2 .

3) La boule tirée dans U_2 est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche dans U_1 ?

B) Un joueur mise 8 et effectue une épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est à dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 (5 points)

Dans un sac sont placées 9 boules numérotés de 1 à 9.

1) On tire au hasard trois boules successivement et on constitue ainsi un nombre à trois chiffres. On remet à chaque fois la boule tirée dans le sac.

- a) Combien de nombres différents peut-on construire ?
- b) Combien de nombres pairs peut-on construire ?

2) Maintenant, on tire trois boules successivement, mais on ne remet pas les boules tirées dans le sac.

- a) Combien de nombres différents peut-on construire ?
- b) Combien de nombres qui ne contiennent pas le chiffre 7 peut-on construire ?
- c) Combien de nombres ayant le 5 ou le 8 en dernière position peut-on construire ?

3) On tire maintenant trois boules simultanément du sac et on regarde les trois chiffres obtenus.

- a) Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
- b) Combien de ces tirages ne contiennent ni le chiffre 3 ni le chiffre 6 ?
- c) Combien de ces tirages contiennent le chiffre 2 mais ni le 4 ni le 6 ?

Exercice 4 (3 points)

Sur un smartphone un code de sécurité est composé de 5 cases.

On peut utiliser les 26 lettres de l'alphabet et les 10 chiffres.

1) Combien de codes peut-on créer ?

2) Combien de codes peut-on créer si aucun symbole n'est écrit deux fois ?

3) Ezequiel a oublié son code mais il se souvient que le premier symbole est Z et que le dernier symbole est 9. Combien a-t-il de possibilités ?

4) Giulietta décide d'utiliser 4 lettres et 1 chiffre.

Exemple : NAV3E

Combien a-t-elle de possibilités ?

Exercice bonus

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$

Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.