Exercice 1

les solutions sont de la forme $x \to Ce^{10x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$f(1) = 2 \iff Ce^{10} = 2 \iff C = 2e^{-10}$

$$\boxed{f(x) = 2\, e^{10x - 10}}$$

Exercice 2

1) les solutions sont : $x \to Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} g(x) = 0{,}4 \cos x + 0{,}2 \sin x \\ g'(x) = -0{,}4 \sin x + 0{,}2 \cos x \end{cases}$

$-2\, g(x) + \cos x = -0{,}8 \cos x - 0{,}4 \sin x + \cos x$

$-2\, g(x) + \cos x = (1 - 0{,}8) \cos x - 0{,}4 \sin x$

$-2\, g(x) + \cos x = g'(x)$

donc g est une solution particulière de (E)

3) L'ensemble des solution de (E) est

$f(x) = Ke^{-2x} + 0{,}4 \cos x + 0{,}2 \sin x$ avec $K \in \mathbb{R}$

Exercice 3

1) $G(x) = \frac{1}{3}(x^3+1)^3$

$H(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+7}$

2) $f(x) = \frac{1}{3}\, 3x^2 e^{x^3}$

Les primitives sont de la forme

$x \to \frac{1}{3} e^{x^3} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

$F(1) = e \iff \frac{1}{3} e + K = e \iff K = \frac{2e}{3}$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}\left(e^{x^3} + 2\right)}$$

Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) Le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{FD}$ a pour coordonnées $(-1,1,-1)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, le point J a pour coordonnées $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ et le point K a pour coordonnées $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times 0 = 0.$$

On en déduit que la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) (les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ étant deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK)) et donc la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $-\left(x-\frac{1}{2}\right)+(y-0)-(z-0)=0$ ou encore

$$\boxed{\text{le plan } (IJK) \text{ a pour équation } x-y+z-\frac{1}{2}=0.}$$

2) La droite (FD) est la droite passant par $D(0,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite } (FD) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=1+t \\ z=-t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.}$$

3) Soit $N(-t,1+t,-t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (FD).

$$N\in(IJK) \Leftrightarrow (-t)-(1+t)+(-t)-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow -3t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}.$$

Pour $t=-\frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

4) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times 0=0$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I. L'aire du triangle IJK est donc

$$\mathscr{A} = \frac{IJ\times IK}{2}.$$

$IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $IK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc,

$$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5) D'après la question 3, le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) est le point M. Donc, le volume du tétraèdre $FIJK$ est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire}(IJK)\times MF}{3}.$$

$MF = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc,

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

6) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (IJ) est $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

Le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le point L a pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (KL) est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ z = \frac{t'}{2} \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

Soient $P\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $Q\left(1, \frac{1}{2} + \frac{t'}{2}, \frac{t'}{2}\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$P = Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1 \\ \frac{t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ t = \frac{t'}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \end{array}\right. .$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -2$), on obtient le point $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

Exercice 5 (5 points)

1. Pour $t = -2$, on trouve les coordonnées de B.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées : $\left(2-1\ ;\ 1-0\ ;\ 0-2\right)$ soit $\left(1\ ;\ 1\ ;\ -2\right)$
3. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AB)$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 1\times t \\ y-0 &=& 1\times t \\ z-2 &=& -2\times t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& t \\ z &=& 2-2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

   En posant $t = 1-u$, on obtient :

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AB) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-u \\ y &=& 1-u \\ z &=& 2u \end{array}\right. \quad u\in\mathbb{R}$. Donc réponse B.

4. La droite Δ a pour vecteur directeur $\delta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

   Soit $\mathscr{P}$ le plan dont on cherche une équation.

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{CM}\cdot\delta = 0 \iff 2(x-0)+1(y-1)-1(z-2) = 0 \iff$
   $2x+y-1-z+2 = 0 \iff 2x+y-z+1 = 0$.

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :
   $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires.