Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 5 pts Ex2 : 6 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 4 pts

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^x.$$

A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$.

B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.

C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^x}$.

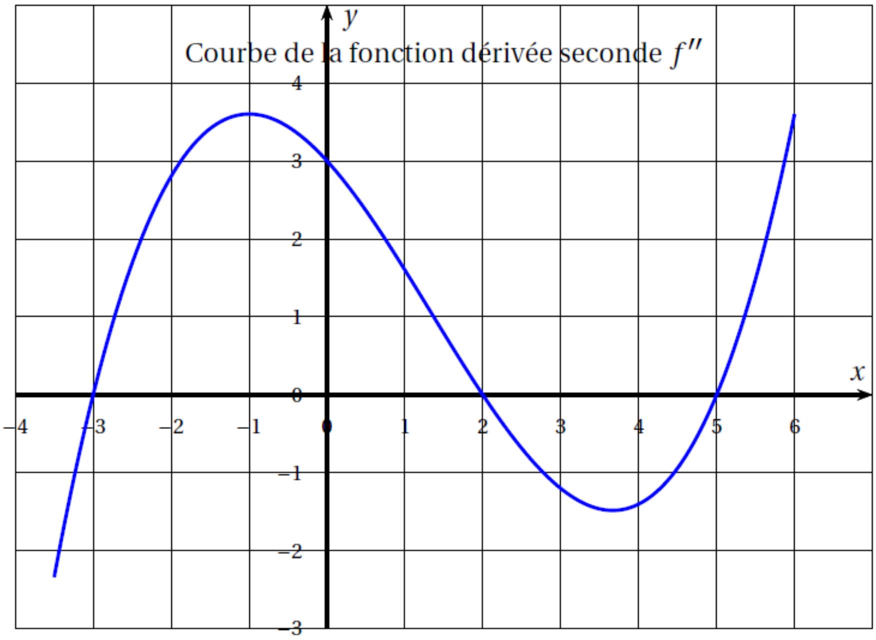
Sa courbe représentative dans un repère admet :

A. une seule asymptote horizontale;

B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale;

C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

A. La suite (u_n) est minorée.

B. La suite (u_n) est décroissante.

C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.

On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
    u = 2
    n = 0
    while u < 45 :
        u = 0,75*u + 5
        n = n+1
    return n
```

Cette fonction renvoie :

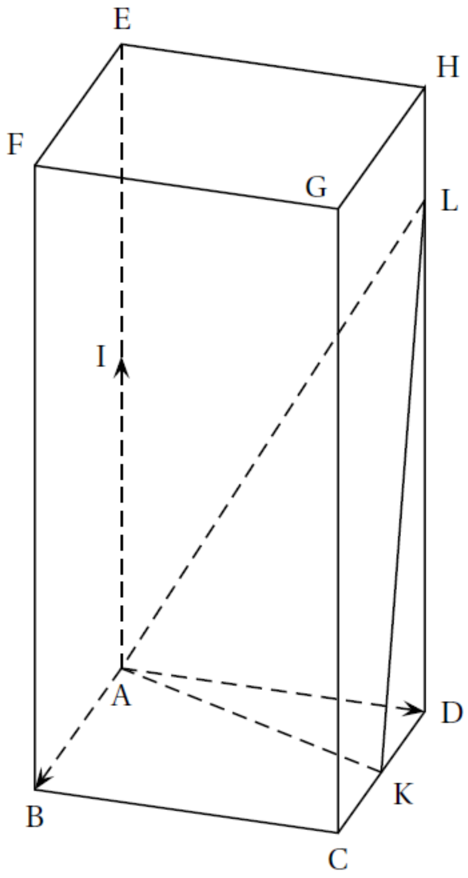
A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;

B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

Exercice 2

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\ 1\,;\ \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

2. a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6\,;\ -3\,;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

   c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

   d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\ \frac{40}{49}\,;\ \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. a. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

   b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

   c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 3

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie »;
- T : « Le test du chat est positif »;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
   c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
   d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

   a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
   d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

   a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.
   b.

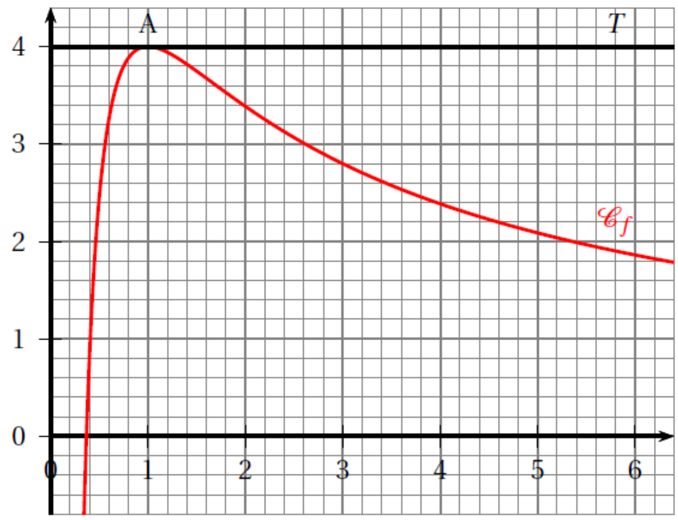
   Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :
    n = 0
    P = 0
    while P < 0,99 :
        n = n + 1
        P = 1 - 0,55 ** n
    return n
```

   c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.