Spécialité Mathématiques-BAC BLANC (4h)

Les calculatrices sont autorisées.
les élèves traiteront les exercices 1,2,3,4.

Ex1 : 5 pts Ex2 : 6 pts Ex3 : 5 pts Ex4 : 4 pts

Exercice 1

1.

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x.$$

On a $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$.

- On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, puis que
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Réponse C.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+e^x}$.

- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini;
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Réponse C.

3. On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

$n^2-17n+20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{80}{4} = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4} = \left(n - \frac{17-\sqrt{209}}{2}\right)\left(n - \frac{17+\sqrt{209}}{2}\right.$

On a donc quel que soit n, $u_n \geqslant -\frac{209}{4}$: la suite est donc minorée. Réponse A.

4. Réponse A.

Exercice 2

1. Avec C(1 ; 1 ; 0) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$ et on a $\overrightarrow{\mathrm{AL}}\left(0 ; 1 ; \dfrac{3}{2}\right)$.

2. **a.** • $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AK}} = 3 - 3 + 0 = 0$;
   • $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AL}} = 0 - 3 + 3 = 0$: le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan ; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

   b. On a donc $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{AKL}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.
   Conclusion : $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{AKL}) \iff 6x - 3y + 2z = 0$.

   c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :
   $M(x ; y ; z) \in \Delta \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y-1 & = & -3t \\ z & = & 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

   d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ, donc ses coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & 2t \\ 6x-3y+2z=0 & & \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6 \times 6t + (-3) \times (1-3t) + 2 \times 2t = 0 \iff$

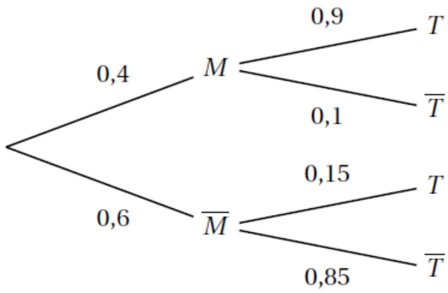
   $36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \dfrac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \times \dfrac{3}{49} \\ y & = & 1 - 3 \times \dfrac{3}{49} \\ z & = & 2 \times \dfrac{3}{49} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{18}{49} \\ y & = & \dfrac{40}{49} \\ z & = & \dfrac{6}{49} \end{array}\right.$. Conclusion : $\mathrm{N}\left(\dfrac{18}{49} ; \dfrac{40}{49} ; \dfrac{6}{49}\right)$.

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D ; on a par définition AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.
   Donc $\mathcal{A}(\mathrm{ADK}) = \dfrac{\mathrm{AD} \times \mathrm{DK}}{2} = \frac{1}{4}$.
   D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc
   $\mathcal{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$.

   b. On a $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} - 1 ; \dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49} ; \frac{-9}{49} ; \frac{6}{49}\right)$, donc :
   $\mathrm{DN}^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2+9^2+6^2}{49^2} = \frac{324+81+36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2$.
   Donc $\mathrm{DN} = \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$.

   c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :
   $\mathcal{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) \times \mathrm{DN}}{3}$, soit $\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}$, d'où
   $\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) = 7 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ (u. a.).

Exercice 3



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,36 + 0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de $0,45$.

On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,55 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leqslant n$ (car $\ln 001 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7$.

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

Exercice 4

1. $A(1~;~4) \in \mathscr{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1;4)$; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3. En utilisant les résultats du **1.** :
$f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
$f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. • On sait que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$;
   • On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.
   On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites :
   $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.
On sait que sur $]0~;~1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;~1[$;
Par contre sur $]1~;~+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1~;~+\infty[$;
$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1;~4)$ est le maximum de la fonction sur $]0~;~+\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $]0;~1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1~;~+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6. f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :
$f''(x) = \dfrac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :
$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8\ln x = 0 \iff -1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff$
$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}649$ (ou $\sqrt{\mathrm{e}}$).
L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3{,}639$.
Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.